Uniwersytet Śląski w Katowicach
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
Instytut Matematyki

Anna Glenszczyk

Semantyczne badania fragmentów Intuicjonistycznej Logiki Kontrolnej

PRACA DOKTORSKA

Promotor
dr hab. Tomasz Połacik

Katowice 2017

Spis treści

Wstęp

W 1907 roku holenderski matematyk Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) w swojej pracy doktorskiej zatytułowanej „O podstawach matematyki” [3] przedstawił zarys filozofii matematyki opartej na konstruktywizmie i odrzucającej platońską wizję świata idei istniejącego niezależnie od ludzkiego poznania. Według Brouwera matematyka jest tworem wolnego rozumu, niezależnym od języka, zaś jedynym pojęciem *a priori* w sensie kantowskim jest czas. Konsekwencją takiego ujęcia było odejście od dotychczasowej klasycznej koncepcji mówiącej, że każde poprawnie skonstruowane stwierdzenie matematyczne jest albo prawdziwe, albo fałszywe.

Zaproponowana przez Brouwera filozofia intuicjonizmu była jedną z odpowiedzi na zjawiska, które pojawiły się w matematyce pod koniec XIX wieku i które podważyły powszechnie do tej pory uznawane intuicje matematyczne. Głównym problemem okazała się teoria mnogości wprowadzona przez Georga Cantora z jej niekonstruktywnymi definicjami. Również rozwijana na przełomie XIX i XX wieku przez Bertranda Russella i Gottloba Fregego logika formalna, mająca stanowić podstawy matematyki, stała w sprzeczności z podejściem intuicjonistycznym. Dla intuicjonistów matematyka – wbrew temu czego chciał Russell – nie mogła być jedynie grą symbolami według ustalonych uprzednio zasad. Brouwer nie tylko postulował matematykę w pewnym sensie niezależną od logiki, ale również nie akceptował programu Hilberta uważając, że matematyki nie można zaksjomatyzować.

Próby odbudowy podstaw matematyki na bazie konstruktywizmu podejmowano już od połowy XIX wieku, zaś intuicjonizm był jednym z wielu przykładów tego typu podejścia do zagadnienia. Najbardziej naturalnym, niejako intuicyjnym obiektem matematycznym, jaki można brać pod uwagę z konstruktywnego punktu widzenia, jest liczba naturalna. Wychodząc od rozważenia abstrakcyjnej jednostki, można przeprowadzić myślową konstrukcję kolejnej jednostki, różnej od poprzedniej, a następnie kolejnej, różnej od poprzednich. Powtarzając ten proces w nieskończoność otrzymujemy zbiór $\mathbb{N}$ liczb naturalnych. Na tej konstrukcji opiera się między innymi finitaryzm, którego prekursorem był Leopold Kronecker. Dopuszcza on jedynie skończenie reprezentowalne struktury matematyczne. Innymi słowy definicje matematyczne są akceptowane, gdy w skończonej liczbie kroków możliwe jest zweryfikowanie czy liczba spełnia daną definicję. W rezultacie krytyce poddane zostają niekonstruktywne dowody istnienia obiektów matematycznych. Osławione jest stwierdzenie Kroneckera: *Bóg stworzył liczby naturalne, reszta jest dziełem człowieka*. Oczywistą konsekwencją takiego podejścia było jego dążenie do „arytmetyzacji" algebry i analizy.

Dobrze znana jest krytyka cantorowskiej teorii mnogości i logiki matematycznej przez *ostatniego matematyka uniwersalnego* – Henri'ego Poincaré. Twierdził on, że w matematyce zamiast logiki potrzebna jest intuicja rozumiana trojako: odniesienie do zmysłów i wyobraźni, generalizacja poprzez indukcję oraz intuicja czystego pojęcia liczby. Wraz z takimi matematykami jak Borel, Lebesgue czy Baire należał do grona francuskich semi-intuicjonistów, którzy brali udział w dyskusji na temat dowodu twierdzenia o dobrym porządku przedstawionego przez Zermelo. Zastosowanie pewnika wyboru wzbudziło szereg wątpliwości, w szczególności pytania dotyczące natury continuum oraz „nieskończonego ciągu wyborów". Emil Borel stwierdził, że skoro można brać pod uwagę jedynie efektywnie zdefiniowane obiekty, liczby rzeczywiste również powinny być zadane przez skończoną definicję, a zatem zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych nigdy nie byłby większy niż przeliczalny. Rozumiejąc ograniczenia takiego „przeliczalnego continuum", Borel rozważał continuum jako pojęcie dane niezależnie przez intuicję: akceptował nieprzeliczalny zbiór liczb rzeczywistych z odcinka jednostkowego jako dany, nazywając to *geometrycznym continuum*.

Brouwer – niezależnie od Borela – rozważał continuum jako pojęcie podstawowe, dostępne intuicji. Dla Brouwera matematyka była konstrukcją myślową „idealnego matematyka", dzięki czemu została uwolniona od ograniczeń związanych z czasem, przestrzenią, wadliwą argumentacją czy językiem, który służy jedynie do wymiany matematycznych idei. Prawdziwość matematycznego stwierdzenia jest dostępna jedynie poprzez konstrukcję uzasadniającą to stwierdzenie. Oznacza to odrzucenie zasady wyłączonego środka oraz dowodów niewprost.

Założenia intuicjonizmu sformalizował uczeń Brouwera, Arend Heyting (1898-1980), który w 1934 roku podał intuicjonistyczną interpretację spójników logicznych. Niezależnie od niego uczynił to A. N. Kołmogorow (1903-1987), który w swojej interpretacji przedstawił logikę intuicjonistyczną jako rachunek problemów [35]. Obie interpretacje były traktowane przez autorów jako niezależne, mimo to interpretację spójników w logice intuicjonisycznej według Heytinga nazywa się *interpretacją Brouwera-Heytinga-Kołmogorowa*:

- dowód formuły $\varphi \wedge \psi$ składa się z dowodu formuły φ oraz z dowodu formuły ψ,
- dowód formuły $\varphi \vee \psi$ polega na wskazaniu jednego ze składników φ, ψ oraz z dowodu wskazanej formuły,
- dowód formuły $\varphi \to \psi$ jest konstrukcją przekształcającą dowolny dowód formuły φ w dowód formuły ψ,
- dowód formuły $\sim\varphi$ jest konstrukcją sprowadzającą dowolny dowód formuły φ do sprzeczności.

Jeżeli rozważany jest język ze stałą *falsum* 0, wówczas negacja formuły $\sim\varphi$ jest definiowana jako $\varphi \to 0$. Falsum nie posiada dowodu.

Interpretacja BHK nie jest formalną definicją, ponieważ nie doprecyzowuje się pojęcia konstrukcji. Jednakże już na tej podstawie nieuchronne jest odrzucenie prawa wyłączonego środka $\varphi \vee \sim\varphi$. W szczególności według interpretacji BHK zdanie postaci $\varphi \vee \sim\varphi$ jest zaakceptowane, jeżeli „idealny matematyk" potrafi przeprowadzić dowód φ, lub potrafi udowodnić, że założenie φ prowadzi do sprzeczności. W przypadku gdy φ jest zdaniem niezależnym, jest to jednak niemożliwe. Dlatego formuła $\varphi \vee \sim\varphi$ jest odrzucona na gruncie interpretacji BHK.

Oprócz powyższej nieformalnej interpretacji, Heyting podał w 1930 roku w [26] w pełni sformalizowany system aksjomatyczny rachunku intuicjonistycznego w terminach systemu hilbertowskiego. Chociaż formalizacja logiki była wbrew intencjom Brouwera, *Rachunek Heytinga* jest powszechnie uważany za odpowiednią formalizację logiki intuicjonistycznej. Logika zaproponowana przez Heytinga była pierwszym systemem, który podawał znaczenie symboli logicznych dla intuicjonizmu w szczególności, a w ogólności dla (większości form) konstruktywizmu. Innymi sposobami sformalizowania logiki intuicjonistycznej jest system naturalnej dedukcji oraz zaproponowany w [20] przez Gentzena rachunek sekwentów.

Dla logiki intuicjonistycznej istnieje szereg adekwatnych semantyk. Heyting w pracy formalizującej logikę intuicjonistyczną wprowadził wielowartościowe tabele pozwalające wykazać wzajemną niedefiniowalność spójników. W tym również kierunku szły prace Stanisława Jaśkowskiego [29]. Pod koniec lat trzydziestych Alfred Tarski przedstawił semantykę topologiczną będącą generalizacją zero-jedynkowej interpretacji logiki klasycznej. Wiadomo, że prawa logiki klasycznej mają swoje odpowiedniki w własnościach algebr Boole'a. W przypadku logiki intuicjonistycznej poszukiwano podobnej algebry, z operacją uzupełnienia U^c posiadającą własności odpowiadające intuicjonistycznej negacji. Wobec tego wymaga się, by $U^{cc} \neq U$, ponieważ w logice intuicjonistycznej negacja nie jest inwolutywna. Te i inne własności sugerowały, że operator ^{cc} zachowuje się jak operacja domknięcia w topologii. W rezultacie jako adekwatną semantykę topologiczną rozważa się algebrę otwartych podzbiorów przestrzeni topologicznej. Jest ona szczególnym przypadkiem *algebry Heytinga*, którą definiuje się – podobnie jak algebry Boole'a – poprzez zbiór aksjomatów dla pewnych operacji.

Dla potrzeb niniejszej dysertacji największą rolę odgrywać będzie semantyka światów możliwych przedstawiona przez Saula Aarona Kripkego w [34], która odzwierciedla proces tworzenia konstrukcji matematycznych przez brouwerowskiego „idealnego matematyka". Powstające w jego umyśle obiekty matematyczne oraz dowody są osadzone w czasie, a wszystkie udowodnione do tej pory twierdzenia pozostają prawdziwe w przyszłości. W dowolnym momencie może podejmować szereg decyzji, z których każda prowadzi go do pewnego, być może różnego od innych, stanu wiedzy. Ilustracją tego procesu zdobywania informacji rozciągniętego w czasie i zależnego od pewnych decyzji są struktury częściowo uporządkowane z odpowiednio określonym wartościowaniem, które tworzą tzw. modele Kripkego.

Pomiędzy logiką intuicjonistyczną, a teoretyczną informatyką istnieje ścisły związek wyrażający się w pojęciu *izomorfizmu Curry'ego-Howarda* (a właściwie *izomorfizmu Brouwera-Heytinga-Kołmogorowa-Curry'ego-Mereditha-Kleene'ego-Gödla-Kraisela-Howarda-Scotta-Martin-Löfa-Girarda- ...*). Jest on znany także pod nazwą *dowody-jako-programy* (ang. *proofs-as-programs*) lub *twierdzenia-jako-typy* (ang. *propositions-as-types*). Izomorfizm Curry'ego-Howarda określa formalną odpowiedniość między dowodami logiki intuicjonistycznej, a termami λ-rachunku z typami. Rachunek λ jest pewnym określonym modelem obliczeniowym, równoważnym modelowi opartemu na koncepcji maszyny Turinga. Podczas gdy w przypadku maszyny Turinga obliczenia wyraża się jako odczyt i zapis na taśmie oraz wykonywanie pewnych działań w zależności od kontekstu odczytanego z taśmy, w przypadku λ-rachunku operuje się funkcjami, które mogą zarówno pobierać jako argumenty jak i zwracać jako wartości inne funkcje. Po raz pierwszy wzajemną odpowiedniość między dowodami w logice intuicjonistycznej, a λ-rachunkiem zauważył w latach trzydziestych Haskell Brooks Curry [10, 11]. William Alvin Howard w pracy [28] po raz pierwszy w sposób formalny przedstawił koncepcję „formuł-jako-typy” w postaci izomorfizmu między teorią typów a systemem naturalnej dedukcji dla logiki intuicjonistycznej, w którym β-redukcji odpowiada proces normalizacji dowodu.

Aksjomatycznie logikę intuicjonistyczną można otrzymać eliminując ze zbioru aksjomatów logiki klasycznej prawo wyłączonego środka. Istnieje szereg praw logiki klasycznej, które nie są prawdziwe intuicjonistycznie. W szczególności intuicjonistyczna negacja nie jest inwolutywna, to znaczy nie zachodzi prawo eleminacji podwójnej negacji $\sim\sim \varphi \to \varphi$. Około roku 1990 Timothy Griffin zauważył, że to prawo odpowiada po stronie teorii typów zapisowi pewnego operatora kontrolnego. Operatory kontrolne bądź sterujące (ang. *control operators*) występują w wielu językach programowania. Oczywistymi przykładami są mechanizm wyjątków (ang. *exception mechanism*) w C++ i Javie lub `catch` oraz `throw` w języku Lisp. Tego typy konstrukcje zostały sformalizowane przez Felleisena [17, 18] jako rachunek z operatorem $\mathcal{C}$ (control) oraz operatorem $\mathcal{A}$ (abort). Odkąd wiadomo, że izomorfizm Curry'ego-Howarda można przedłużyć na logikę klasyczną [25], zostało sformułowanych kilka *konstruktywnych* klasycznych systemów, włącznie z systemem *LC* Girarda [21] oraz systemem dedukcji Parigota, z którego wyprowadzono $\lambda\mu$-rachunek [45] oraz jego warianty. Izomorfizm między λ-abstrakcją i intuicjonistyczną implikacją jest bardzo mocny. Redukcja intuicjonistycznej logiki do logiki klasycznej i rozważanie spektrum klasycznych dowodów oznacza utratę siły wyrazu tkwiącej w intuicjonistycznej implikacji. Z drugiej strony przy zanurzeniu logiki klasycznej w logike intuicjonistyczną poprzez translację Gödla zmienione zostaje znaczenie klasycznego dowodu, ponieważ z tego typu translacji oczekuje się jedynie λ-termów, a nie $\lambda\mu$-termów.

Jednym z rozwiązań powyższego problemu jest zaproponowana w 2013 roku przez Chucka Lianga i Dale'a Millera Intuicjonistyczna Logika Kontrolna (ang. *Intuitionistic Control Logic*, ICL). Inspiracją do jej stworzenia była logika liniowa Girarda, jednakże punktem wyjścia pozostała semantyka kripkowska dla logiki intuicjonistycznej. Aby zachować siłę wyrazu intuicjonistycznej implikacji, a jednocześnie dostarczyć możliwości kodowania operatorów kontrolnych takich jak $\mathcal{C}$ lub `call/cc`, do języka logiki intuicjonistycznej dodaje się nową stałą, która pozwala zdefiniować dodatkową, różną od intuicjonistycznej negację. Ze względu na tę negację w Intuicjonistycznej Logice Kontrolnej prawdziwe jest prawo wyłączonego środka oraz pewna wersja prawa Peirce'a. Kluczową formułą jest eliminacja połączenia dwóch dostępnych w ICL negacji, czyli prawdziwa na gruncie tej logiki formuła $\sim\neg\varphi \to \varphi$, która jest częściową odpowiedzią na problem postawiony przez Griffina: dostarczenie logice intuicjonistycznej pewnej formy inwolutywnej negacji pozwalającej kodować operator kontrolny $\mathcal{C}$.

Celem niniejszej rozprawy jest przedstawienie wyników dotyczących własności Intuicjonistycznej Logiki Kontrolnej. Badano fragmenty zdaniowe ICL, w szczególności fragment negacyjny, oraz ogólne własności logiki: możliwość zanurzenia w pewnej logice modalnej i złożoność obliczeniową. W Rozdziale 1 przypomniane zostają pojęcia wstępne dotyczące Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej (1.1, 1.2). Zaprezentowany jest rachunek naturalnej dedukcji oraz pokrótce przedstawione są adekwatne semantyki. W punkcie 1.3 omówiony jest związek lambda rachunku z logiką i zastosowania logiki we współczesnej informatyce.

Na początku Rozdziału 2 przytoczone są za [37, 38] definicje i twierdzenia dotyczące Intuicjonistycznej Logiki Kontrolnej. Wprowadzenie do języka Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej dodatkowej negacji w celu wyrażenia określonych operatorów w językach programowania pociąga pytania o siłę wyrazu tego spójnika. W przypadku logik modalnych znane są wyniki dotyczące liczby operatorów możliwych do wydefiniowania za pomocą dostępnych w danej logice modalności. Podobne zagadnienie można sformułować na gruncie ICL w związku z istnieniem dwóch różnych negacji i możliwych połączeń tych dwóch spójników. Rozważany jest więc monadyczny fragment negacyjny, a także pozostałe fragmenty monadyczne analogicznie do badań znanych z Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej (krata Riegera-Nishimury). Twierdzenia i metody przedstawione w Rozdziałach 2.2 – 2.5 są wynikami autorskimi.

W Rozdziale 3 omówione jest zagadnienie *modal companion*: każdą logikę pośrednią można zanurzyć w pewnej logice modalnej. Intuicjonistyczna Logika Kontrolna nie jest oczywiście logiką superintuicjonistyczną, ponieważ powstaje poprzez rozszerzenie języka, a nie poprzez dodanie aksjomatu do systemu aksjomatycznego dla Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej. Powstaje zatem pytanie czy i w jaki sposób można zanurzyć ICL w logikę modalną. Odpowiedź na nie stanowią autorskie wyniki zawarte w punktach 3.2 – 3.3.

Pracę zamyka rozdział podsumowujący przedstawione zagadnienia wraz z dyskusją na temat złożoności obliczeniowej ICL.

Rozdział 1

Wprowadzenie

Formułując podstawy filozoficzne intuicjonizmu Brouwer nie zamierzał formalizować go jako systemu logicznego. Interpretacja BHK nie podaje precyzyjnego opisu semantyki konstruktywnej. Występujące tam pojęcie „konstrukcji” jest nieformalne i pozostawia szerokie możliwości interpretacji. Pytanie o formalizację zostało postawione jako problem w 1928 roku w konkursie organizowanym przez Holenderskie Stowarzyszenie Matematyczne. Odpowiedzią był zaprezentowany przez Heytinga system w stylu hilbertowskim. W 1934 roku Gentzen wprowadził dwa nowe rodzaje formalizacji logiki. System *naturalnej dedukcji* podaje reguły wprowadzania i eliminacji dla spójników logicznych odpowiadające ich znaczeniu. W *rachunku sekwentów* rolę osobnych reguł dla wprowadzania i eliminacji odgrywa lewo- bądź prawostronny kontekst.

Dla intuicjonistycznej logiki zdaniowej istnieje kilka adekwatnych semantyk. W przypadku semantyki algebraicznej mamy do czynienia z algebrami Heytinga. Analogię do klasycznego pojęcia wartości prawdy przedstawili Tarski, Stone i inni, wskazując na podobieństwo między logiką intuicjonistyczną i operacją wnętrza w topologii. W niniejszej dysertacji główny nacisk badań został położony na przedstawioną na zakończenie Rozdziału 1.2 semantykę światów możliwych Kripkego.

1.1 Intuicjonistyczny Rachunek Zdań

Przypomnimy teraz podstawowe pojęcia i fakty dotyczące Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej. Będziemy posługiwać się zamiennie nazwą Intuicjonistyczny Rachunkiem Zdań (IRZ). Rozważamy język $\mathcal{L}_i$ wyznaczony przez spójniki zdaniowe alternatywy, koniunkcji i implikacji oznaczane odpowiednio przez $\vee, \wedge, \to$ i stałą *falsum* oznaczaną przez 0.

Definicja 1.1.1. Niech zbiór P będzie nieskończonym (przeliczalnym) zbiorem zmiennych zdaniowych. Zbiorem formuł zdaniowych języka $\mathcal{L}_i$ nazywamy najmniejszy zbiór $Form$ taki, że

- $P \subseteq Form$ oraz $0 \in Form$,
- jeżeli $\varphi, \psi \in Form$, to $(\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \to \psi) \in Form$.

Spójnik negacji $\sim$, równoważności $\leftrightarrow$ oraz stałą *verum* oznaczaną przez 1 rozumiemy jako skróty odpowiednio:

- $\sim\varphi := \varphi \to 0$,
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,
- $1 := 0 \to 0$.

System dowodowy w stylu Hilberta $\mathcal{H}$-IRZ podany w pracy [27] nazywany jest *Rachunkiem Heytinga*. Składa się ze zbioru formuł (*aksjomatów logicznych*) oraz zestawu reguł dowodowych. W przypadku $\mathcal{H}$-IRZ jedyną regułą jest modus ponens:

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi} \qquad \text{(MP)}$$

Definicja 1.1.2. Aksjomaty hilbertowskiego systemu logiki intuicjonistycznej $\mathcal{H}$-IRZ dane są poprzez następujące schematy formuł:

(H1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(H2) $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$

(H3) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$

(H4) $\varphi \wedge \psi \to \psi$

(H5) $\varphi \to (\psi \to (\psi \wedge \varphi))$

(H6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$

(H7) $\psi \to (\varphi \vee \psi)$

(H8) $(\varphi \to \psi) \to ((\theta \to \psi) \to ((\varphi \vee \theta) \to \psi))$

(H9) $0 \to \varphi$

Powyższy zestaw aksjomatów podany został za [56]. Czasami zamiast aksjomatu (H5) podaje się równoważny schemat

$$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \theta) \to (\varphi \to (\psi \wedge \theta))),$$

natomiast w przypadku rozpatrywania języka z negacją aksjomat (H9) zastępuje sie dwoma schematami

$$\sim\varphi \to (\varphi \to \psi) \quad \text{oraz} \quad (\varphi \to \sim\varphi) \to \sim\varphi.$$

Definicja 1.1.3. Dowodem formuły φ nazywamy skończony ciąg formuł $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ taki, że $\psi_n = \varphi$ oraz taki, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$

- formuła ψ_i jest aksjomatem lub
- istnieją $j, k < i$ takie, że $\psi_j = \psi_k \to \psi_i$ (to znaczy formuła ψ_i powstaje z formuł ψ_j i ψ_k poprzez zastosowanie reguły (MP)).

Jeżeli dla danej formuły istnieje dowód, wówczas nazywamy ją tezą.

Warto zauważyć, że system Klasycznej Logiki Zdań $\mathcal{H}$-KRZ powstaje przez dodanie do zestawu aksjomatów (H1) – (H9) jednego z poniższych schematów:

- $\varphi \vee \sim\varphi$ (Prawo wyłączonego środka),
- $\sim\sim\varphi \to \varphi$ (Prawo eliminacji negacji),
- $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ (Prawo Peirce'a),
- $(\sim\varphi \to \sim\psi) \to (\psi \to \varphi)$ (Prawo kontrapozycji).

Inną formalizację idei odzwierciedlonych w interpretacji BHK dokonuje się poprzez zdefiniowanie systemu dowodowego nazywanego *systemem dedukcji naturalnej*, który będziemy oznaczać za [20] jako NJ. Podajemy go wersji przedstawionej w [51] korzystając z zapisu właściwego rachunkowi sekwentowemu.

Definicja 1.1.4. *Osądem* nazywamy parę postaci $\Gamma \vdash \varphi$, złożoną ze skończonego zbioru formuł Γ oraz formuły φ. *Dowodem formalnym* (bądź *derywacją*) formuły φ z założeń Γ nazywamy skończone drzewo osądów spełniające następujące warunki:

- korzeniem drzewa jest osąd $\Gamma \vdash \varphi$,
- osąd przypisany dowolnemu wierzchołkowi drzewa powstaje z osądów przypisanych jego dzieciom przez zastosowanie jednej z reguł wnioskowania na Rys. 1.1,
- wszystkie liście są aksjomatami (czyli osądami postaci $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$).

Jeżeli istnieje takie drzewo, to mówimy, że osąd $\Gamma \vdash \varphi$ jest dowodliwy. Wówczas zapis $\Gamma \vdash \varphi$ będzie oznaczał zarówno osąd jak i jego dowodliwość. W dalszej części pracy, jeżeli system dowodowy nie będzie wynikał z kontekstu, zostanie to zaznaczone np. $\vdash_{\mathsf{IRZ}} \varphi$. Dla przejrzystości zapisu stosujemy konwencję Γ, φ zamiast $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ (\mathrm{Ax}) \qquad \frac{\Gamma \vdash 0}{\Gamma \vdash \varphi}\ (0E)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to W) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\to E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ (\vee W) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ (\vee W)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \theta \qquad \Gamma, \psi \vdash \theta \qquad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \theta}\ (\vee E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ (\wedge W) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\wedge E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\wedge E)$$

Rysunek 1.1: Reguły wnioskowania naturalnej dedukcji dla rachunku zdań NJ

Rachunek naturalnej dedukcji poprzez izomorfizm Curry'ego-Howarda wiąże logikę z programowaniem dzięki wzajemnej odpowiedniości dowodów i wyrażeń w rachunku lambda z typami. Szerzej to zagadnienie omówimy w Rozdziale 1.3.

1.2 Semantyki adekwatne dla IRZ

Rozpoczniemy od podania interpretacji logiki intuicjonistycznej na gruncie algebr Heytinga, a następnie pokażemy związek tych struktur z interpretacją topologiczną wprowadzoną przez Tarskiego w [54]. Poniższe definicje i własności algebr Heytinga podajemy za [47].

Definicja 1.2.1. Niech $A \neq \emptyset$. Kratę dystrybutywną $(A, \sqcap, \sqcup, 0, 1)$ z elementem najmniejszym 0 i największym 1 nazywamy *algebrą Heytinga*, jeżeli dla dowolnych elementów $a, b \in A$ istnieje element $a \Rightarrow b$ taki, że dla dowolnego elementu $c \in A$ mamy

$$c \leqslant a \Rightarrow b \text{ wtw } a \wedge c \leqslant b.$$

Element $a \Rightarrow b$ nazywamy *pseudo-uzupełnieniem elementu a względem elementu b*. *Pseudo-uzpełnienie* $-a$ dowolnego elementu $a \in A$ definiujemy jako $a \Rightarrow 0$.

Algebra Lindenbauma klasycznej logiki zdaniowej, czyli algebra ilorazowa na zbiorze formuł logiki względem relacji równoważności formuł, tworzy algebrę Boole'a. Analogiczną rolę dla zdaniowej logiki intuicjonistycznej odgrywa algebra Heytinga. Wartościowanie $v : Form \to A$ przekształcające formuły logiki intuicjonistycznej na elementy kraty Heytinga jest zdefiniowane w sposób standardowy. Jedyność pseudouzupełnień pozwala na przedstawienie algebry Heytinga w postaci $(A, \sqcap, \sqcup, \Rightarrow, 0, 1)$. Ta sygnatura jest zgodna z językiem $\mathcal{L}_i$.

Definicja 1.2.2. Niech $\mathcal{H} = (A, \sqcap, \sqcup, \Rightarrow, 0, 1)$ będzie algebrą Heytinga. Funkcja $v : Var \to A$ jest wartościowaniem zmiennych zdaniowych ze zbioru Var. Znaczenie formuły $\varphi \in Form$ przy wartościowaniu v oznaczamy $\langle\varphi\rangle_v$ i definiujemy indukcyjnie:

- $\langle 0\rangle_v = 0$ oraz $\langle 1\rangle_v = 1$,
- $\langle p\rangle_v = v(p)$, dla $p \in Var$,

- $\langle \varphi \vee \psi \rangle_v = \langle \varphi \rangle_v \sqcup \langle \psi \rangle_v$,
- $\langle \varphi \wedge \psi \rangle_v = \langle \varphi \rangle_v \sqcap \langle \psi \rangle_v$,
- $\langle \varphi \to \psi \rangle_v = \langle \varphi \rangle_v \Rightarrow \langle \psi \rangle_v$.

Powiemy, że formuła φ jest prawdziwa , jeżeli $\langle \varphi \rangle_v = 1$ dla dowolnej algebry Heytinga $\mathcal{H}$ oraz dowolnego wartościowania v.

Dla tak zdefiniowanej semantyki zachodzi twierdzenie o pełności, przytaczamy je w wersji podanej w [41] obejmującej przypadek skończonych algebr Heytinga.

Twierdzenie 1.2.3. *Formuła φ jest tezą* IRZ *wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest prawdziwa w każdej algebrze Heytinga. Co więcej, formuła φ jest tezą* IRZ *wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest prawdziwa w każdej skończonej algebrze Heytinga.*

Każda skończona krata dystrybutywna jest algebrą Heytinga. Dowolna algebra Boole'a $(A, \cup, \cap, -, 0, 1)$ jest algebrą Heytinga, przy czym operacja $a \Rightarrow b$ jest wtedy zdefiniowana jako $-a \cup b$. Jeżeli rozważymy przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{O})$ wraz z operacją wnętrza zbioru $Y \subseteq X$ zdefiniowaną zwyczajowo $\mathrm{Int}(Y) = \bigcup\{U \in \mathcal{O} : U \subseteq Y\}$, wówczas algebra $(\mathcal{O}, \cup, \cap, \Rightarrow, \emptyset, X)$ jest algebrą Heytinga, przy czym

$$U \Rightarrow V := \mathrm{Int}((X \setminus U) \cup V),$$

dla każdych dwóch zbiorów $U, V \in \mathcal{O}$.

Niech $w : Var \to \mathcal{O}$ będzie wartościowaniem określonym na zbiorze zmiennych zdaniowych. Indukcyjnie względem budowy formuły można je rozszerzyć na zbiór wszystkich formuł logiki intuicjonistycznej:

- $w(0) = \emptyset$ oraz $w(1) = X$,
- $w(\varphi \wedge \psi) = w(\varphi) \cap w(\psi)$,
- $w(\varphi \vee \psi) = w(\varphi) \cup w(\psi)$,
- $w(\varphi \to \psi) = \mathrm{Int}((X \setminus w(\varphi)) \cup w(\psi))$,
- $w(\sim \varphi) = \mathrm{Int}(X \setminus w(\varphi))$.

Powiemy, że formuła φ jest *prawdziwa* w $(X, \mathcal{O})$, jeżeli dla dowolnego wartościowania w zachodzi $w(\varphi) = X$.

Twierdzenie 1.2.3 traktuje o pełności IRZ względem klasy wszystkich algebr Heytinga obejmującej również modele topologiczne. Okazuje się jednak, że klasę tę można ograniczyć do klasy takich przestrzeni, w których żaden punkt nie jest punktem izolowanym. Odwołujemy się do pracy McKinseya i Tarskiego [43], ale można je znaleźć także w książce Rasiowej i Sikorskiego [47] jako część twierdzenia 3.2 w rozdziale IX.

Twierdzenie 1.2.4 (McKinseya-Tarskiego)**.** *Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą zbiorów otwartych dowolnej przestrzeni topologicznej metrycznej w sobie gęstej. Wówczas formuła φ jest tezą IRZ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest prawdziwa w $\mathcal{A}$.*

Dla Klasycznej Logiki Zdaniowej semantyka topologiczna jest szczególnym przypadkiem powyższej struktury, dla danego zbioru X rozważa się topologię trywialną $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$.

Na przełomie lat 50 i 60 ubiegłego wieku S. Kripke przedstawił w pracach [32, 33] semantykę dla logik modalnych nazywaną *semantyką światów możliwych*. Wraz ze znaną translacją Gödla-Tarskiego logiki intuicjonistycznej w logikę modalną $\mathsf{S4}$ semantyka światów możliwych stała się punktem wyjścia dla semantyki dla IRZ zaprezentowanej w [34]. Poniższe definicje podajemy w konwencji stosowanej w [1]. Szczegółowe omówienie semantyki kripkowskiej dla logiki intuicjonistycznej można znaleźć między innymi w [41, 12].

Definicja 1.2.5. *Strukturą Kripkego* dla logiki intuicjonistycznej nazywamy parę $\mathbb{K} = \langle K, \leqslant \rangle$, gdzie K jest niepustym zbiorem, a relacja $\leqslant$ jest częściowym porządkiem na zbiorze K. Elementy zbioru K nazywamy *światami*.

W strukturze Kripkego $\mathbb{K}$ określa się *wartościowanie* jako dowolną funkcję $V : \mathrm{Var} \to 2^K$ taką, że dla każdego świata $k \in K$, jeżeli $k \in V(p)$ oraz $k \leqslant k'$, to $k' \in V(p)$.

Modelem Kripkego opartym na strukturze $\mathbb{K}$ nazywamy parę $\mathcal{M} = \langle \mathbb{K}, V \rangle$.

Definicja 1.2.6. Relację *forsowania* (wymuszania, spełniania) formuły φ w świecie k modelu $\mathcal{M} = \langle K, \leqslant, V \rangle$ oznaczaną poprzez $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi$ definiujemy indukcyjnie względem budowy formuły:

- $\mathcal{M}, k \Vdash 1$

- $\mathcal{M}, k \nVdash 0$
- $\mathcal{M}, k \Vdash p$ wtw $k \in V(p)$
- $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi \vee \psi$ wtw $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi$ lub $\mathcal{M}, k \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi \wedge \psi$ wtw $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi$ oraz $\mathcal{M}, k \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, k \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ wtw dla każdego $m \geqslant k$ jeżeli $\mathcal{M}, m \Vdash \varphi$ to $\mathcal{M}, m \Vdash \psi$.

Monotoniczność relacji forsowania

$$\text{jeżeli } \mathcal{M}, k \Vdash \varphi \text{ oraz } k \leqslant m, \text{ to } \mathcal{M}, m \Vdash \varphi,$$

dla dowolnego świata $k \in K$ i dowolnej formuły φ, wynika z monotoniczności wartościowania V w modelu.

Jeżeli model $\mathcal{M}$ jest ustalony, będziemy pomijać go w zapisie forsowania ograniczając się do $k \Vdash \varphi$.

Definicja 1.2.7. Powiemy, że formuła φ jest *prawdziwa w modelu* $\mathcal{M} = \langle K, \leqslant, V \rangle$ (ozn. $\mathcal{M} \Vdash \varphi$), gdy jest forsowana we wszystkich światach zbioru K przy wartościowaniu V.

Powiemy, że formuła φ jest *prawdziwa* (ozn. $\Vdash \varphi$), gdy φ jest prawdziwa we wszystkich modelach.

W ten sposób zdefiniowana semantyka jest adekwatna dla IRZ na mocy twierdzenia o pełności [34].

Twierdzenie 1.2.8 (Pełność IRZ względem klasy modeli Kripkego)**.** *Dla dowolnej formuły φ mamy*

$$\vdash_{\mathsf{IRZ}} \varphi \text{ wtw } \Vdash \varphi.$$

Do tej pory rozważaliśmy modele Kripkego oparte na dowolnym zbiorze częściowo uporządkowanym. W przypadku Intuicjonistycznej Logiki Kontrolnej podstawę dla modelu stanowi klasa drzew. Warto w tym miejscu przytoczyć za [12] twierdzenie o pełności Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej względem takiej struktury. Pomijamy w tym miejscu formalną definicję drzewa, dla uproszczenia rozumiemy je jako dowolną strukturę $\langle K, \leqslant, \mathbf{r} \rangle$, gdzie $\mathbf{r}$ jest wyszczególnionym elementem najmniejszym, to znaczy takim, że dla każdego świata $k \in K$ zachodzi $\mathbf{r} \leqslant k$.

Twierdzenie 1.2.9. *Formuła φ jest dowodliwa w* IRZ *wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest prawdziwa w każdym modelu Kripkego opartym na drzewie skończonym.*

Natychmiastową konsekwencją powyższego twierdzenia jest wniosek o rozstrzygalności intuicjonistycznej logiki zdaniowej.

1.3 Zastosowania i odnośniki do informatyki

Od kilkudziesięciu lat matematyka stopniowo przestaje być głównym polem zastosowań logiki. Obecnie najprężniej rozwijające się działy logiki to te, które służą jako podstawy teoretyczne informatyki, wśród których na pierwszy plan wybija się wykazywanie poprawności programów czy badanie złożoności algorytmów. Nawet wśród języków formalnych za najważniejsze dziś należałoby uznać języki programowania bądź języki zapytań bazodanowych, a nie rachunek Hilbertowski czy rachunek sekwentowy. Jednakże między językami programowania funkcyjnego oraz rachunkiem dowodowym Gentzena istnieje ścisły związek, który jest głównym źródłem zastosowania logiki we współczesnej informatyce teoretycznej. Jest on znany pod nazwą *izomorfizm Curry'ego–Howarda* i mówi o wzajemnej zależności między systemami logiki formalnej oraz programami w formie rachunku typów, stąd też równorzędne nazwy tej idei: *dowody-jako-programy* (ang. *proofs-as-programs*) czy *formuły-jako-typy* (ang. *formulas-as-types*). Zaawansowana teoria typów jest obecnie używana między innymi jako narzędzie do tworzenia systemów wspomagających weryfikację programów.

Pojęcie *formuły-jako-typy* jest powszechnie używane, mimo że jego precyzyjne znacznie nie zostało określone, a poszczególni autorzy różnią się w swoich interpretacjach. A. Troelstra w [55] wyróżnia trzy warianty tego pojęcia:

(A) stwierdzenie istnienia odpowiedniości między „dowodem formuły", a „elementem typu (zbioru)", oraz stwierdzenie, że formuły implikacyjne dowodliwe na gruncie intuicjonistycznej logiki implikacyjnej odpowiadają dokładnie tzw. zamieszkałym typom w podstawowej teorii typów;

(B) wzmocnienie poprzedniego punktu: izomorfizm pomiędzy prostą teorią typów oraz naturalną dedukcją dla minimalnej (czyli intuicjonistycznej) logiki implikacyjnej, gdzie β-redukcja odpowiada normalizacji po stronie dedukcji. Ten izomorfizm może być przedłużony do pełnej logiki zdaniowej poprzez odpowiednie rozszerzenie prostej teorii typów;

(C) badanie podobieństw między „dowodem formuły”, a „elementem typu” poprzez podanie jednolitej prezentacji reguł dla dowodzenia twierdzeń oraz należenia do typu.

W najogólniejszym znaczeniu izomorfizm Curry'ego-Howarda jest sposobem reprezentacji dowodów intuicjonistycznych przy użyciu lambda rachunku z typami. Intuicjonistycznie formuła jest zdeterminowana poprzez zbiór swoich dowodów. Formule φ można zatem przypisać pewien typ M, będący zbiorem jej dowodów:

$$M : \varphi,$$

a w przypadku dodatkowych założeń Γ można rozszerzyć notację do

$$\Gamma \vdash M : \varphi.$$

Rachunek lambda z typami prostymi według Curry'ego to system wnioskowania oparty na regułach z Rys. 1.2.

$$\frac{}{\Gamma, x\colon \tau \vdash x\colon \tau}\ (\mathrm{Var})$$

$$\frac{\Gamma, x\colon \sigma \vdash M\colon \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x M)\colon \sigma \to \tau}\ (\mathrm{Abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M\colon \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N\colon \sigma}{\Gamma \vdash (MN)\colon \tau}\ (\mathrm{App})$$

Rysunek 1.2: Rachunek lambda z typami prostymi $\lambda_{\to}$

W regułach (Var) oraz (Abs) zmienna x nie należy do otoczenia Γ. Jeżeli $\Gamma \vdash M\colon \tau$ dla pewnych Γ oraz τ, mówimy, że term M jest *typowalny*. Oczywiście nie wszystkie termy są typowalne (na przykład typ xx nie jest typowalny w żadnym otoczeniu), zaś termy typowalne mogą posiadać wiele różnych typów.

Formalnie (choć nadal w pewnym uproszczeniu) odpowiedniość między formułami i typami oraz dowodami i termami zawierającą się w pojęciu izomorfizmu Curry'ego-Howarda można sformułować w postaci poniższego twierdzenia. Przez $|\Gamma|$ rozumiemy zbiór formuł

$$\{\tau \in \Phi_{\to} \mid (x\colon \tau) \in \Gamma,\ \text{dla pewnego } x\},$$

gdzie $\Phi_{\to}$ jest zbiorem wszystkich typów prostych.

Twierdzenie 1.3.1 (Izomorfizm Curry'ego-Howarda)**.**

(i) *Jeżeli* $\Gamma \vdash M : \varphi$ *w systemie* $\lambda_{\rightarrow}$*, to* $|\Gamma| \vdash \tau$ *w logice minimalnej.*

(ii) *Jeżeli* $\Delta \vdash \tau$ *w logice minimalnej, to* $\Gamma \vdash M : \varphi$ *w systemie* $\lambda_{\rightarrow}$*, dla pewnego* M *oraz* Γ *takiego, że* $|\Delta| = \Gamma$*.*

Na gruncie interpretacji BHK intuicjonistyczna implikacja formuł jest rozumiana jako procedura przekształcająca dowód poprzednika w dowód następnika. A zatem dowód formuły postaci $\varphi \rightarrow \psi$ składa się z funkcji, której argumentem jest dowód formuły φ (niech będzie nim x), zaś wartością dowód formuły ψ (niech będzie nim M). Do oznaczenia funkcji posługujemy się operatorem λ i w ostateczności otrzymujemy regułę (Abs) rachunku λ z typami z Rys. 1.2 odpowiadającą wprowadzaniu implikacji ($\rightarrow$ W) w rachunku naturalnej dedukcji dla logiki intuicjonistycznej z Rys. 1.1. Analogicznie w przypadku reguł (Var) i (App) oraz odpowiednio reguły (Ax) i eliminacji implikacji ($\rightarrow$ E). Rachunek $\lambda_{\rightarrow}$ można rozszerzyć do pełnego języka. Na gruncie interpretacji BHK koniunkcja odpowiada iloczynowi kartezjańskiemu, a alternatywa sumie prostej. Zatem w rachunku lambda z typami prostymi wprowadzanie koniunkcji to tworzenie pary, a eliminacja koniunkcji to rzutowanie. Z kolei wprowadzaniu alternatywy odpowiada tworzenie obiektu wariantowego, a eliminacji alternatywy instrukcja wyboru.

Prosta teoria typów została po raz pierwszy sformułowana przez Alonso Churcha [6, 7, 8]. Wyprowadził on rachunek lambda z systemu, który miał być sformalizowaniem podstaw matematyki. Początkowo miał łączyć w sobie zarówno zbiór pojęć logicznych jak i pojęć dotyczących funkcji. Jednakże Kleene i Rosser opierając się na technikach zastosowanych przez Gödla w dowodzie twierdzenia o niezupełności pokazali, że system ten jest sprzeczny [31], co skłoniło Churcha do porzucenia pierwotnego zamysłu i skupienia się na tej części systemu, która obejmowała jedynie pojęcia związane z funkcjami. Church wprowadził pojęcie lambda definiowalności dla funkcji $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ aby uściślić pojęcie obliczalności. Kleene w [30] pokazał, że każda częściowo rekurencyjna funkcja jest λ-definiowalna i vice versa. Doprowadziło to do sformułowania hipotezy znanej jako *teza Churcha*: wszystkie intuicyjnie obliczalne funkcje są lambda definiowalne [5]. W tym samym czasie, niezależnie od Churcha, Alan Turing zaproponował alternatywną formalizację pojęcia obliczalności opartą na idei maszyny Turinga [57] oraz udowodnił, że lambda definiowalność oraz obliczalność w sensie Turinga są pojęciami równoważnymi [58].

Rachunek lambda jest prototypem języka programowania. Wersje z typami zaproponowane przez Curry'ego i Churcha zapoczątkowały dwie rodziny systemów. W rachunku w wersji Curry'ego każdemu termowi jest przyporządkowany zbiór możliwych typów, jednakże mamy tu do czynienia z funkcją częściową, to znaczy zbiór przyporządkowanych typów może być pusty. W przypadku rachunku w wersji Churcha każdy term posiada unikalny typ. Dodatkowo w rachunku Churcha zaproponowanym w [5] mamy do czynienia z prostym rachunkiem lambda, w którym abstrakcja $\lambda x.M$ jest dozwolona tylko wtedy, gdy x występuje jako wolna zmienna w M. Obecnie pojęcie lambda rachunku odwołuje się raczej do wersji zainicjowanej przez Curry'ego [9, 10], w której $\lambda x.M$ jest dopuszczalne nawet wtedy, gdy x nie występuje w M. Curry jako pierwszy rozważał ideę *formuł-jako-typy* w znaczeniu określonym powyżej w punkcie (A) między inny w [11], gdzie podał system przyporządkowania typów odpowiadający po stronie logiki aksjomatyzacji w stylu Hilberta intuicjonistycznej logiki implikacyjnej. Odnosił się jednak również do pracy Gentzena [20] i rozważał system przyporządkowania typów odpowiadający systemowi naturalnej dedukcji. Z programistycznego punktu widzenia wprowadzenie typów do lambda rachunku pozwoliło na automatyczną eliminację błędów typograficznych już na etapie kompilacji danego programu.

Pierwszym językiem programowania funkcyjnego był `LISP` zaprojektowany i zaimplementowany przez J. McCarthy'ego i współpracowników w 1962 r. Innym ważnym przykładem języka funkcyjnego z typami jest oparty na wariancie $\lambda_{\rightarrow}$ Curry'ego język `Standard ML` rozwijany w wielu wersjach ze względu na relatywnie wydajną implementację i możliwość weryfikacji typów na etapie kompilacji. Rachunek lambda znalazł również szerokie zastosowanie w teorii systemów automatycznego i wspomaganego maszynowo dowodzenia twierdzeń. Należy tu wspomnieć o projekcie AUTOMATH de Bruijna, który był pierwszym systemem w sposób praktyczny wykorzystującym izomorfizm Curry'ego-Howarda.

Na przestrzeni lat powstało wiele różnych odmian rachunku typów odpowiadających poszczególnym językom programowania funkcyjnego, bądź własnościom, które dany λ-rachunek miał odzwierciedlać, między innymi $\lambda\mu$-rachunek wprowadzony przez Parigota w [45]. Na tym systemie jest oparty $\lambda\gamma$-rachunek odpowiadający systemowi naturalnej dedukcji dla intuicjonistycznej logiki kontrolnej. Izomorfizm Curry'ego-Howarda jest ściśle związany z logiką intuicjonistyczną. Jednakże pewne operatory występujące w językach programowania mogą być wyrażone jedynie poprzez formuły będące tezami logiki klasycznej, a niedowodliwe na gruncie logiki intuicjonistycznej, na przykład prawo wyłączonego środka czy eliminacja podwójnej negacji. Odpowiedniość między tego typu klasycznymi aksjomatami a operatorami kontrolnymi pokazał Griffin w pracy [25]. Od tego czasu powstał szereg *konstruktywnych* systemów klasycznych, wśród których najbardziej znanym jest logika liniowa Girarda [21] oraz system klasycznej dedukcji naturalnej Parigot'a, z którego wywodzi się $\lambda\mu$-rachunek [45]. Te systemy nie rozwiązują jednak do końca problemów związanych z siłą izomorfizmu między λ-abstrakcją i inuticjonistyczną implikacją. Skolapsowanie logiki intuicjonistycznej do logiki klasycznej rodzi pytanie o sposób definicji implikacji. Z drugiej strony zanurzenie logiki klasycznej w logikę intuicjonistyczną poprzez kanoniczną translację Gödla ingeruje w konstruktywne znaczenie dowodu, ponieważ przy takim tłumaczeniu uzyskuje się λ-termy, a nie $\lambda\mu$-termy z rachunku Parigota.

Wprowadzona przez Chucka Lianga i Dale'a Millera Intuicjonistyczna Logika Kontrolna do pewnego stopnia przezwycięża pewne niedostatki poprzednich systemów. Inspiracją do jej stworzenia była logika liniowa Girarda, w której występuje w pełni inwolutywna negacja zachowująca konstruktywną interpretację. Dużym ograniczeniem w tym przypadku jest jednak nierozstrzygalność fragmentu zdaniowego. W odróżnieniu od logiki liniowej Intuicjonistyczna Logika Kontrolna posiada prosty język, a jej fragment zdaniowy jest rozstrzygalny. Należy jednak pamiętać, że także i ta logika jest nakierunkowana na odzwierciedlenie wybranych własności pewnych konkretnych operatorów sterujących, więc nie może być traktowana jako w pełni uniwersalne połączenie logiki klasycznej i intuicjonistycznej.

Rozdział 2

Intuicjonistyczna Logika Kontrolna

Logika intuicjonistyczna i klasyczna przenikają się wzajemnie. Jeżeli do zbioru aksjomatów (H1) – (H9) dołączymy prawo wyłączonego środka $\varphi \vee \sim\varphi$ bądź prawo eliminacji negacji $\sim\sim\varphi \to \varphi$ (bądź jeden z innych tego typu aksjomatów), otrzymamy aksjomatyzację dla logiki klasycznej. W tym sensie logika intuicjonistyczna jest słabsza od logiki klasycznej, a każdy dowód konstruktywny (to znaczy dowód IRZ) jest dowodem klasycznym. Z drugiej strony logikę klasyczną można zinterpretować jako podzbiór logiki intuicjonistycznej. Stosuje się w tym celu translację Gödla-Gentzena (Kołmogorowa) zanurzającą logikę klasyczną w logikę intuicjonistyczną. Każda formuła logiki klasycznej jest dowodliwa wtedy i tylko wtedy, gdy translacja Gödla-Gentzena tej formuły jest dowodliwa intuicjonistycznie. To wzajemne przenikanie systemów klasycznego i intuicjonistycznego nie jest jednak w rozważanym przez nas kontekście wystarczające. Dodanie do zbioru aksjomatów prawa eliminacji negacji (użytecznego ze względu na opis operatorów kontrolnych) redukuje intuicjonistyczną implikację do spójnika klasycznego. Z drugiej strony translacja podwójnej negacji nie wystarcza do opisu interesujących nas obiektów w językach programowania.

Intuicjonistyczna Logika Kontrolna (ang. *Intuitionistic Control Logic* – ICL), zdefiniowana w pracach [37, 38] autorstwa Chucka Lianga i Dale'a Millera, do pewnego stopnia może być traktowana jako połączenie logiki klasycznej i logiki intuicjonistycznej. Jednakże głównym impulsem do stworzenia tego systemu było poszukiwanie logiki posiadającej intuicjonistyczne spójniki, w której da się wydefiniować operatory kontrolne w językach programowania. W Intuicjonistycznej Logice Kontrolnej odbywa się to poprzez dodanie do języka logiki intuicjonistycznej nowej stałej $\perp$. Jest ona traktowana jako dodatkowa stała *falsum*, różna od falsum intuicjonistycznego.

Celem niniejszego rozdziału jest zaprezentowanie wyników dotyczących fragmentów monadycznych ICL.

2.1 Semantyka i syntaktyka

Język Intuicjonistycznej Logiki Kontrolnej składa się z przeliczalnie wielu zmiennych oznaczanych $p_1, p_2, p_3, \ldots$, intuicjonistycznych spójników $\vee, \wedge, \rightarrow$ oraz trzech stałych: intuicjonistycznego *falsum* 0 i *verum* 1 oraz nowej stałej oznaczanej przez $\perp$. Stała $\perp$ w ICL nie jest *falsum* w ścisłym znaczeniu, jednak ze względu na to, że pozwala wyrazić operatory języków programowania, które do tej pory znajdowały odzwierciedlenie jedynie w logice klasycznej, nazywamy ją *falsum klasycznym* pamiętając jak dalece niewspółmierne jest to nazewnictwo.

W sposób standardowy definiuje się intuicjonistyczną negację:

$$\sim\varphi := \varphi \rightarrow 0$$

oraz w analogiczny sposób przy pomocy stałej $\perp$ *klasyczną negację*:

$$\neg\varphi := \varphi \rightarrow \perp.$$

Szczegółowe omówienie obu negacji nastąpi w Rozdziale 2.2, tam również wyjaśnimy w jakim stopniu można traktować klasyczną negację $\neg\varphi$ na gruncie Intuicjonistycznej Logiki Kontrolnej analogicznie do negacji w klasycznej logice zdaniowej.

Liang i Miller podają pełny opis semantyki kripkowskiej, topologicznej i algebraicznej, który przytoczymy w tym rozdziale. Wszystkie definicje i twierdzenia z niniejszego podrozdziału są zaczerpnięte z prac [37, 38]. Jedynie w przypadku poniższej definicji r-modelu wprowadzamy zmianę posługując się pojęciem drzewa i korzystamy z pojęcia światów urojonych zaczerpniętym z pracy [39].

Definicja 2.1.1. *R-modelem Kripkego* nazywamy model Kripkego $\langle T, V\rangle$, gdzie T jest skończonym drzewem $T = \langle W, \mathbf{r}, \leqslant\rangle$ z wyróżnionym korzeniem $\mathbf{r}$. Wszystkie światy istotnie powyżej korzenia nazywamy *światami urojonymi.*

Wartościowanie V jest określone jak w Definicji 1.2.5. Na mocy Twierdzenia 1.2.9 zdefiniowany powyżej r-model jest modelem Kripkego dla Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej. W przypadku logiki ICL konieczne jest oczywiście w stosunku do Definicji 1.2.6 zdefiniowanie wymuszania dla stałej $\perp$. W pozostałych przypadkach relację $\Vdash$ przedłużamy na wszystkie formuły języka w sposób standardowy. Podobnie jak w przypadku modelu dla logiki intuicjonistycznej, relacja wymuszania w r-modelu również jest monotoniczna. Dla porządku przytaczamy pełną definicję forsowania.

Definicja 2.1.2. Niech dany będzie r-model $\mathcal{M} = \langle W, \mathbf{r}, \leqslant, V \rangle$ oraz niech $u, v, i \in W$. Relację *forsowania* (wymuszania) formuły φ definiujemy indukcyjnie względem budowy formuły:

- $u \Vdash 1$ oraz $u \nVdash 0$
- $\mathbf{r} \nVdash \perp$
- $i \Vdash \perp$ dla każdego $i > \mathbf{r}$
- $u \Vdash p$ wtw $u \in V(p)$
- $u \Vdash \varphi \vee \psi$ wtw $u \Vdash \varphi$ lub $u \Vdash \psi$
- $u \Vdash \varphi \wedge \psi$ wtw $u \Vdash \varphi$ oraz $u \Vdash \psi$
- $u \Vdash \varphi \to \psi$ wtw dla każdego $v \geqslant u$ jeżeli $v \Vdash \varphi$ to $v \Vdash \psi$.

Prawdziwość w modelu i prawdziwość formuły ICL definiujemy jak w przypadku intuicjonistycznym.

Wymuszanie stałej $\perp$ odróżnia korzeń r-modelu od wszystkich pozostałych światów w tym modelu: w każdym świecie urojonym forsowana jest stała $\perp$. Warto w tym miejscu zauważyć, że o ile formula φ w ICL nie zawiera stałej $\perp$ jako podformuły, to φ jest formułą IRZ. Zwyczajowo będziemy oznaczać symbolami u, v, w dowolne światy zbioru W, natomiast symbolem i będziemy reprezentować świat urojony.

Istnieje standardowa procedura przekształcająca struktury Kripkego w algebrę Heytinga poprzez stworzenie kraty stożków (ang. *upwardly closed subsets*) będących podzbiorami struktury Kripkego. Konstrukcja ta zastosowana do struktury Kripkego z elelmentem najmniejszym (a w szczególności dla drzew skończonych, jak w przypadku ICL) prowadzi do algebry z opremum, czyli z największym elementem różnym od elementu największego algebry.

Opremum reprezentuje wówczas zbiór wszystkich światów urojonych struktury Kripkego. Zatem semantykę algebraiczną dla ICL tworzy klasa wszystkich skończonych algebr Heytinga z opremum, w których stała $\bot$ jest interpretowana jako opremum.

Rozważmy rozdzinę $\mathcal{O}$ zbiorów otwartych w $\mathbb{R}$ ze zwykłą topologią. Definiujemy algebrę Heytinga $\mathcal{HR}$ na bazie tej topologii jako $\langle \mathcal{O}, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \to, \emptyset \rangle$, ze zwyczajowo zdefiniowanymi operacjami $\sqsubseteq, \sqcup, \sqcap$ oraz z operacją pseudouzupełnienia $a \to b$ zdefiniowaną jako $\mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus a) \cup b$. W tak zdefiniowanej topologii dla ICL, stała $\bot$ wyraża się poprzez zbiór $\mathbb{R}$ pomniejszony o zbiór jednoelementowy. Dla ustalenia uwagi Liang i Miller proponują, by był to zbiór $\perp\!\!\!\perp = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Jedynym zbiorem zawierającym ten zbiór jest cała prosta rzeczywista, która wraz z elementem $\perp\!\!\!\perp$ tworzy dwuelementową algebrę Boole'a, w której interpretujemy logikę klasyczną. Waluacja zadana jest standardowo, tak jak to przytoczyliśmy dla logiki intuicjonistycznej w Definicji 1.2.2, przy czym

$$\langle 0 \rangle = \emptyset, \langle 1 \rangle = \mathbb{R}, \langle \bot \rangle = \perp\!\!\!\perp.$$

W przypadku r-modeli opartych na strukturze jednoelementowej algebra Heytinga kolapsuje się do dwuelementowej algebry Boole'a.

Liang i Miller podają system dowodowy dla ICL w postaci rachunku sekwentów (Rys. 2.1). W sekwencie postaci $\Gamma \vdash \varphi; [\Delta]$ zbiory Γ oraz Δ reprezentują lewostronny i prawostronny kontekst, natomiast formułę φ nazywamy *formułą kontrolną*. Podobnie jak w przypadku rachunku sekwentów dla logiki intuicjonistycznej zapis φ, Θ oznacza $\{\varphi\} \cup \Theta$ i nie wyklucza, że formuła φ znajduje się już w zbiorze formuł Θ. Formuła φ jest dowodliwa, gdy dowodliwy jest sekwent $\vdash \varphi; [\,]$.

Przykład 2.1.3. Formuła $\varphi \to \neg\neg\varphi$ jest dowodliwa na gruncie systemu LJC.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi; [\,]}\,Id \qquad \dfrac{}{\bot, \varphi \vdash \bot; [\,]}\,\bot L}{\neg\varphi, \varphi \vdash \bot; [\,]}\,\to L}{p \vdash \neg\neg\varphi; [\,]}\,\to P}{\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi; [\,]}\,\to P$$

Formuły w zbiorze $[\Delta]$ odgrywają rolę jedynie w przypadku zastosowania w dowodzie reguły *Esc*. Jeżeli w dowodzie nie pojawia się ta reguła, mamy do czynienia z dowodem intuicjonistycznym, nawet jeżeli formuła zawiera stałą

$$\frac{}{\varphi, \Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}\ (Id)$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \psi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi; [\Delta]} \to P \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi; [\Delta] \qquad \psi, \Gamma \vdash \theta; [\Delta]}{\varphi \to \psi, \Gamma \vdash \theta; [\Delta]} \to L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi; [\Delta]} \vee P_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi; [\Delta]} \vee P_2$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \theta; [\Delta] \qquad \psi, \Gamma \vdash \theta; [\Delta]}{\varphi \vee \psi, \Gamma \vdash \theta; [\Delta]} \vee L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi; [\Delta] \qquad \Gamma \vdash \psi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi; [\Delta]} \wedge P \qquad \frac{\varphi, \psi, \Gamma \vdash \theta; [\Delta]}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \vdash \theta; [\Delta]} \wedge L$$

$$\frac{}{0, \Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}\ 0L \qquad \frac{}{\bot, \Gamma \vdash \bot; [\Delta]}\ \bot L \qquad \frac{}{\Gamma \vdash 1; [\Delta]}\ 1P$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi; [\varphi, \Delta]}{\Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}\ Con \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \bot; [\varphi, \Delta]}\ Esc$$

Rysunek 2.1: Reguły wnioskowania rachunku sekwentów LJC

$\bot$ jako podformułę jak w Przykładzie 2.1.3. Ten rezultat nie jest zaskakujący, dokładnie ten sam schemat dowodowy można zastosować do pokazania, że formuła $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$ jest tezą IRZ. Dodatkowa – w stosunku do rachunku LJ – reguła Con bez użycia reguły Esc jest bezużyteczna, a reguła $\bot L$ jest wariantem reguły Id w przypadku stałej $\bot$. Poniżej podajemy przykład użycia reguł Con oraz Esc.

Przykład 2.1.4. Prawo wyłączonego środka w oparciu o klasyczną negację, czyli formuła $\varphi \vee \neg\varphi$, jest dowodliwe na gruncie systemu LJC.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\varphi \vdash \varphi; [\,]}\, Id}{\varphi \vdash \varphi \vee \neg\varphi; [\,]}\, \vee P_1}{\varphi \vdash \bot; [\varphi \vee \neg\varphi]}\, Esc}{\vdash \neg\varphi; [\varphi \vee \neg\varphi]}\, \to P}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi; [\varphi \vee \neg\varphi]}\, \vee P_2}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi; [\,]}\, Con
$$

Ze względu na związek naturalnej dedukcji z lambda rachunkiem podajemy również za [37] system NJC. W oparciu o to samo źródło przytaczamy Twierdzenie o pełności LJC względem semantyki kripkowskiej.

$$
\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}\, \wedge E_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \psi; [\Delta]}\, \wedge E_1
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi; [\Delta] \qquad \varphi, \Gamma \vdash \theta; [\Delta] \qquad \psi, \Gamma \vdash \theta; [\Delta]}{\Gamma \vdash \theta; [\Delta]}\, \vee E
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi; [\Delta] \qquad \Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \psi; [\Delta]} \to E \qquad \frac{\Gamma \vdash 0; [\Delta]}{\Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}\, 0E
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash \varphi; [\Delta] \qquad \Gamma \vdash \psi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi; [\Delta]}\, \wedge W \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi; [\psi, \Delta]}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi; [\Delta]}\, \vee W_1
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash \psi; [\varphi, \Delta]}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi; [\Delta]}\, \vee W_2
$$

$$
\frac{\varphi, \Gamma \vdash \psi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi; [\Delta]} \to W \qquad \frac{}{\Gamma \vdash 1; [\Delta]}\, 1W \qquad \frac{}{\varphi, \Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}\, Id
$$

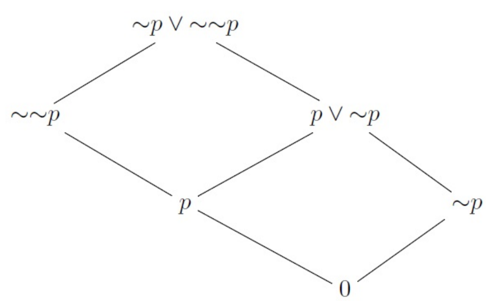
$$
\frac{\Gamma \vdash \varphi; [\varphi, \Delta]}{\Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}\, Con \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi; [\Delta]}{\Gamma \vdash \bot; [\varphi, \Delta]}\, Esc
$$

Rysunek 2.2: Reguły wnioskowania naturalnej dedukcji NJC

Twierdzenie 2.1.5 (O pełności)**.** *Formuła φ Intuicjonistycznej Logiki Kontrolnej jest dowodliwa na gruncie LJC wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich r-modelach.*

2.2 Monadyczny fragment negacyjny

Na gruncie Klasycznej Logiki Zdaniowej w przypadku fragmentu negacyjnego mamy do czynienia jedynie z daną formułą φ i jej negacją $\neg_k\varphi$ (gdzie $\neg_k$ rozumiemy jako negację w logice klasycznej zdefiniowaną w zwyczajowy sposób). Prawo podwójnej negacji sprowadza wszystkie formuły postaci $\neg_k\neg_k\varphi$ do wyjściowej formuły φ. W przypadku logiki intuicjonistycznej fragment negacyjny składa się z formuł $p, \sim p, \sim\sim p$. Domykając ten fragment na operacje supremu i infimum otrzymujemy kratę zaprezentowaną na Rysunku 2.3. Powstaje pytanie jaką postać ma fragment negacyjny w przypadku połączenia dwóch różnych negacji w logice ICL. Liang i Miller wskazali pewne podstawowe własności formuł negacyjnych, w szczególności interesującej nas ze względu na operator $\mathcal{C}$ formuły $\sim\neg\varphi$. W niniejszym rozdziale przedstawimy kompletny opis fragmentu negacyjnego.



Rysunek 2.3: Krata monadycznego fragmentu negacyjnego IPC

W Przykładzie 2.1.4 pokazaliśmy, że prawo wyłączonego środka ze względu na klasyczną negację jest tezą ICL. Mimo to nie można tego spójnika traktować jak negację w logice klasycznej, chociażby ze względu na brak własności inwolutywności: formuła $\neg\neg\varphi \to \varphi$ nie jest tezą ICL (por. Przykład 2.3.3); ta własność nie zależy bowiem od stałej, lecz od rodzaju implikacji użytej w definicji negacji. Dla uniknięcia nieporozumień w dalszym ciągu pracy do wskazania formuły typu $\neg\varphi$ będziemy używać określenia $\bot$-*negacja*.

Rozważamy monadyczny fragment negacyjnym ICL, to znaczy fragment złożony z formuł postaci

$$\varphi ::= p \,|\, \sim\varphi \,|\, \neg\varphi.$$

Przyjmujemy, że N_k oraz N_m oznaczają ciągi obu negacji różnej długości oraz że $k, m \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$. Zapis $\sim^n$ oraz $\neg^n$ rozumiemy jako iterację n negacji danego typu. Monadyczną formułę negacyjną (krótko: n-formułę) oznaczamy przez $N_k p$, gdzie N_k jest ciągiem negacji długości k. Jako *długość n-formuły* $N_k p$ przyjmujemy liczbę negacji k. W zależności od parzystości ciągu negacji w danej formule, będziemy ją nazywać *parzystą n-formułą* (dla n-formuł postaci $N_{2j}p$) lub *nieparzystą n-formułą* (dla n-formuł postaci $N_{2j+1}p$). Zmienną p traktujemy jako formułę negacyjną długości 0.

Każdy r-model określony jak w Definicji 2.1.1 jest modelem dla monadycznego fragmentu negacyjnego ICL. Dla porządku, ze względu na to, że obie negacje są w tym przypadku spójnikami pierwotnymi, definiujemy ich interpretację w r-modelu dla fragmentu negacyjnego.

Definicja 2.2.1. Modelem Kripkego dla negacyjnego fragmentu ICL nazywamy czwórkę $\mathcal{M} = \langle W, \mathbf{r}, \leqslant, V\rangle$, gdzie zbiór W, element $\mathbf{r}$, relacja $\leqslant$ oraz funkcja V są zdefiniowane jak w Definicji 2.1.1. Definiujemy forsowanie negacji w sposób następujący:

- $u \Vdash {\sim}\varphi$ wtw $w \nVdash \varphi$, dla każdego $w \geqslant u$
- $u \Vdash \neg\varphi$ wtw $w \nVdash \varphi$ lub $w > \mathbf{r}$, dla każdego $w \geqslant u$.

Powyższa definicja wymuszania dla negacji jest oparta o definicję wymuszania dla stałych $0, \bot$ oraz intuicjonistycznej implikacji w przypadku pełnego języka. Wymuszanie negacji intuicjonistycznej jest standardowe, natomiast w przypadku $\bot$-negacji mamy

$$u \Vdash \neg p \text{ wtw } w \nVdash p \text{ lub } w \Vdash \bot, \text{ dla każdego } w \geqslant u.$$

Warunek $w \Vdash \bot$ jest równoważny temu, że w jest światem urojonym. Zauważmy, że dla dowolnego świata urojonego i może zachodzić jednocześnie $i \Vdash \neg p$ oraz $i \Vdash p$. W tym sensie światy urojone są „sprzeczne”.

Własności $\bot$-negacji podsumowuje poniższy fakt.

Fakt 2.2.2. *Dla każdej n-formuły φ zachodzą następujące własności:*

(1) $\mathbf{r} \Vdash \neg\varphi$ wtw $\mathbf{r} \nVdash \varphi$,

(2) $\mathbf{r} \nVdash \neg\varphi$ wtw $\mathbf{r} \Vdash \varphi$,

(3) $u \nVdash \neg\varphi$ wtw $u = \mathbf{r}$ oraz $v \Vdash \varphi$ dla dowolnego $v \in W$,

(4) $i \Vdash \neg\varphi$ dla wszystkich $i > \mathbf{r}$.

Pierwszy i drugi punkt wynika wprost z definicji. W przypadku pełnego języka zwróciliśmy uwagę, że forsowanie stałej $\perp$ odróżnia korzeń r-modelu od pozostałych światów. Podobnie zachowuje się $\perp$-negacja: korzeń modelu jest jedynym światem, w którym formuła $\neg\varphi$ może być odrzucona:

$$u \nVdash \neg\varphi \text{ wtw } w \Vdash \varphi \text{ oraz } w = \mathbf{r}\,, \text{ dla pewnego } w \geqslant u.$$

Stąd wynika, że $\perp$-negacja formuły jest wymuszana we wszystkich światach urojonych.

Interesuje nas relacja między n-formułami i badamy prawdziwość formuł postaci $N_k p \to N_m p$. Oznaczmy przez $\mathcal{N}$ zbiór wszystkich n-formuł. W zwyczajowy sposób definiujemy relację równoważności $\equiv$ na zbiorze $\mathcal{N}$:

$$\varphi \equiv \psi \text{ wtw } \vdash \varphi \to \psi \text{ oraz } \vdash \psi \to \varphi.$$

Rozważamy zbiór ilorazowy:

$$\mathcal{N}/_{\equiv} = \{[\varphi] \mid \varphi \in \mathcal{N}\},$$

gdzie $[\varphi]$ jest klasą równoważności formuły φ. Relacja $\preceq$ na zbiorze $\mathcal{N}/_{\equiv}$ określona jest następująco:

$$[\varphi] \preceq [\psi] \text{ wtw } \vdash \varphi \to \psi.$$

Relacja $\preceq$ zdefiniowana jest na zbiorze klas abstrakcji, jednakże będziemy używać $\preceq$ również do oznaczenia relacji pomiędzy dwoma n-formułami w domyślnym znaczeniu:

$$\varphi \preceq \psi \text{ wtw } \vdash \varphi \to \psi.$$

Powiemy, że n-formuła $\varphi = N_k p$ jest *redukowalna* do n-formuły $\psi = N_m p$, o ile $\varphi \equiv \psi$ oraz $m < k$. Jeżeli dla danej formuły φ nie istnieje równoważna n-formuła mniejszej długości, mówimy, że n-formuła φ jest *nieredukowalna*.

W większości lematów dotyczących implikacji między n-formułami oraz redukowalności n-formuł będziemy odwoływać się do własności ekstensjonalności.

Twierdzenie 2.2.3 (Twierdzenie o ekstensjonalności)**.** *Dla dowolnej formuły $\varphi(p_1, \ldots, p_n, s)$, gdzie $p_1, \ldots, p_n, s$ są zmiennymi zdaniowymi oraz dla dowolnych formuł ψ, θ jeżeli $\vdash \psi \leftrightarrow \theta$, to*

$$\vdash \varphi(p_1, \ldots, p_n, \psi/s) \leftrightarrow \varphi(p_1, \ldots, p_n, \theta/s).$$

Twierdzenie to zachodzi dla Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej. Dowód przebiega indukcyjnie względem budowy formuły. Zachodzi ono także dla ICL.

2.3 Modele i pseudopodmodele

Oznaczmy poprzez $\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$ jednoelementowy model Kripkego, w którym zmienna p jest odrzucona, zaś poprzez $\mathcal{M}_{\mathbf{1}}$ model jednoelementowy, w którym p jest wymuszana.

Łatwo zauważyć, że dla dowolnej n-formuły $N_k p$ minimalny model i minimalny kontrmodel jest zawsze jednoelementowy. W tych przypadkach obie negacje są zredukowane do sytuacji negacji w logice klasycznej. Poszukiwanie kontrmodelu dla formuły, w której głównym spójnikiem jest implikacja intuicjonistyczna sprowadza się do szukania modelu dla poprzednika i kontrmodelu dla następnika tej implikacji. Forsowanie n-formuły zależy od parzystości ciągu negacji poprzedzających zmienną. W tym przypadku pomocny jest następujący zbiór własności.

Lemat 2.3.1. *Dla dowolnego świata u r-modelu $\mathcal{M}$ zachodzi:*

(1) jeżeli $u \Vdash N_{2k}p$, *to istnieje* $w \geqslant u$ *takie, że* $w \Vdash p$ lub $w > \mathbf{r}$ *,*

(2) jeżeli $u \Vdash N_{2k+1}p$, *to istnieje* $w \geqslant u$ *takie, że* $w \nVdash p$ lub $w > \mathbf{r}$ *,*

(3) jeżeli $u \nVdash N_{2k}p$, *to istnieje* $w \geqslant u$ *takie, że* $w \nVdash p$ lub $w > \mathbf{r}$ *,*

(4) jeżeli $u \nVdash N_{2k+1}p$, *to istnieje* $w \geqslant u$ *takie, że* $w \Vdash p$ lub $w > \mathbf{r}$ *.*

Dowód. Przedstawiamy dowód tylko punktów (2) oraz (3), dowód pozostałych punktów jest analogiczny.

Ad (2) Niech $\mathcal{M}$ będzie r-modelem, zaś u niech będzie dowolnym światem w tym modelu. Dowód indukcyjny względem k.

Niech $k = 0$ i niech $\varphi = N_1 p$. Rozważmy dwa przypadki:

Przypadek 1. $\varphi = {\sim}p$.

Wprost z definicji wymuszania intuicjonistycznej negacji, jeżeli $u \Vdash {\sim}p$, to dla każdego $w \geqslant u$ mamy $w \nVdash p$.

Przypadek 2. $\varphi = \neg p$.

Jeżeli $\perp$-negacja jest forsowana w świecie u pewnego modelu, to znaczy, że albo jest to świat urojony, albo mamy do czynienia z korzeniem i jest tam odrzucona podformuła, czyli $u = \mathbf{r}$ i $u \nVdash p$.

Krok indukcyjny: niech $k \geqslant 0$ oraz $\varphi = N_{2(k+1)+1}p$. Rozważmy następujące przypadki:

Przypadek 1. $\varphi = {\sim}{\sim}N_{2k+1}p$.

Załóżmy, że

$$u \Vdash {\sim}{\sim}N_{2k+1}p.$$

Wtedy dla każdego $v \geqslant u$ istnieje świat $v' \geqslant v$ taki, że $v' \Vdash N_{2k+1}p$. Stąd na mocy założenia indukcyjnego, istnieje świat $w \geqslant v'$, w którym

$$w \nVdash p \text{ lub } w > \mathbf{r}\,.$$

W szczególności z przechodniości relacji $\leqslant$ wynika teza.

Przypadek 2. $\varphi = \sim\neg N_{2k+1}p$.
Z założenia

$$u \Vdash \sim\neg N_{2k+1}p$$

wynika, że dla każdego świata $u' \geqslant u$ zachodzi $u' \nVdash \neg N_{2k+1}p$. Z punktu (3) Lematu 2.2.2 wynika, że $u = u' = \mathbf{r}$ oraz $\mathbf{r}$ jest jedynym światem modelu i

$$\mathbf{r} \Vdash N_{2k+1}p,$$

czyli $\mathbf{r} \nVdash p$.

Przypadek 3. $\varphi = \neg\sim N_{2k+1}p$.
Jeżeli

$$u \Vdash \neg\sim N_{2k+1}p,$$

to w szczególności

$$u \nVdash \sim N_{2k+1}p \text{ lub } u > \mathbf{r}\,.$$

Pierwszy z tych warunków implikuje istnienie świata $u' \geqslant u$, w którym forsowana jest formuła $N_{2k+1}p$; na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy tezę.

Przypadek 4. $\varphi = \neg\neg N_{2k+1}p$.
Załóżmy, że

$$u \Vdash \neg\neg N_{2k+1}p.$$

Stąd wynika, że albo $u > \mathbf{r}$, a zatem zachodzi teza, albo $u = \mathbf{r}$ oraz $u \nVdash \neg N_{2k+1}p$. Na mocy Lematu 2.2.2 otrzymujemy $\mathbf{r} \Vdash N_{2k+1}p$, co kończy dowód.

Ad (3) Niech u będzie dowolnym światem pewnego r-modelu $\mathcal{M}$.

Baza indukcji, gdy $k = 0$, czyli przypadek zmiennej zdaniowej, zachodzi w sposób trywialny.

Krok indukcyjny: niech $k \geqslant 0$ oraz $\varphi = N_{2(k+1)}p$. Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. $\varphi = \sim N_{2k+1}p$.
Jeżeli $u \nVdash \sim N_{2k+1}p$, to znaczy, że istnieje świat w powyżej świata u, taki że

$$w \Vdash N_{2k+1}p,$$

a zatem na mocy punktu (2) Twierdzenia 2.3.1 otrzymujemy tezę.

Przypadek 2. $\varphi = \neg N_{2k+1}p$.
Skoro $u \nVdash \neg N_{2k+1}p$, z Faktu 2.2.2 (3) mamy $u = \mathbf{r}$ oraz

$$\mathbf{r} \Vdash N_{2k+1}p,$$

skąd w szczególności ponownie na mocy punktu (2) Twierdzenia 2.3.1 otrzymujemy tezę. $\square$

Implikacja postaci $N_k p \to N_m p$ nie jest prawdziwa, jeżeli parzystości k i m są różne. Formułę postaci $N_{2k}p \to N_{2m+1}p$ można odrzucić w modelu jednoelementowym, w którym forsowana jest zmienna p, natomiast implikację przeciwną można odrzucić w modelu jednoelementowym z nieforsowaną zmienną.

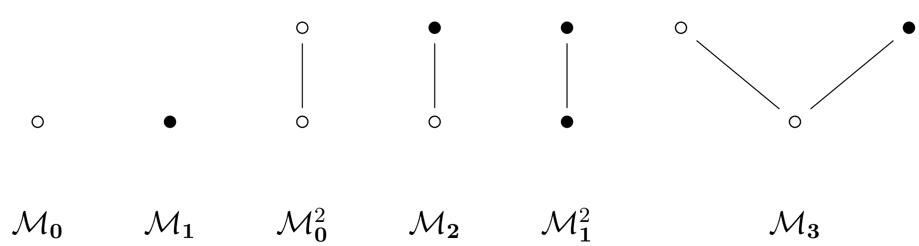
Przyjrzyjmy się dwóm przykładom.

Przykład 2.3.2. Formuła $\neg{\sim}{\sim}p \to \neg\neg{\sim}p$ nie jest tezą ICL.

Przypuśćmy, że istnieje r-model, w którym $\mathbf{r} \nVdash \neg{\sim}{\sim}p \to \neg\neg{\sim}p$. A zatem istnieje świat u (korzeń lub powyżej), w którym $u \Vdash \neg{\sim}{\sim}p$ oraz $u \nVdash \neg\neg{\sim}p$. To znaczy, że w kontrmodelu wymagane jest istnienie świata z forsowaną zmienną p oraz istnienie świata z forsowaną formułą ${\sim}p$. Najmniejszym możliwym kontrmodelem spełniającym te warunki jest model $\mathcal{M}_\mathbf{3}$ z Rys. 2.4.

Przykład 2.3.3. Formuła $\neg\neg p \to p$ nie jest tezą ICL.

Zauważmy, że do odrzucenia tej formuły kontrmodel musi posiadać świat urojony, w którym odrzucona jest zmienna p. Najmniejszymi takimi kontrmodelami są modele $\mathcal{M}_\mathbf{0}^2$ oraz $\mathcal{M}_\mathbf{3}$ z Rys. 2.4.



Rysunek 2.4: Zbiór $\mathcal{S}$ kontrmodeli dla formuł postaci $N_k p \to N_m p$

	$\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$	$\mathcal{M}_{\mathbf{1}}$	$\mathcal{M}^2_{\mathbf{0}}$	$\mathcal{M}_{\mathbf{2}}$	$\mathcal{M}^2_{\mathbf{1}}$	$\mathcal{M}_{\mathbf{3}}$
p	-	+	-	-	+	-
$\sim\sim p$	-	+	-	+	+	-
$\sim\neg p$	-	+	-	-	-	-
$\neg\sim p$	-	+	-	+	+	+
$\neg\neg p$	-	+	-	-	+	-

Rysunek 2.5: Charakterystyka modelowa formuł N_0 oraz N_2

Nie jest konieczne rozważanie większych modeli, ponieważ bierzemy pod uwagę tylko jedną zmienną i konstruujemy formuły z tylko jedną implikacją intuicjonistyczną. Możliwe kontrmodele wraz z oznaczeniami przedstawiamy na Rysunku 2.4. Zbiór $\{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}^2_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^2_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}\}$ możliwych kontrmodeli będziemy oznaczać poprzez $\mathcal{S}$.

Znając zbiór możliwych kontrmodeli dla implikacji n-formuł, łatwo oszacować górne ograniczenie dla mocy zbioru nierównoważnych n-formuł. Każdej implikacji postaci $\varphi \to \psi$ możemy przyporządkować zbiór modeli, w których można odrzucić tę formułę, będący podzbiorem zbioru $\mathcal{S}$. Tego typu podzbiór nie może równocześnie zawierać modeli $\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$ oraz $\mathcal{M}_{\mathbf{1}}$, ponieważ sprzeczność nie jest wyrażalna w naszym języku. Istnieje co najwyżej 2^5 tego typu szukanych podzbiorów zbioru $\mathcal{S}$, a zatem istnieje co najwyżej 32 nierównoważnych monadycznych formuł negacyjnych.

Mając do dyspozycji ograniczoną liczbę możliwych modeli dla monadycznych n-formuł możemy scharakteryzować daną n-formułę w kontekście jej modeli (i kontrmodeli), a następnie na podstawie tej informacji poszukiwać kontrmodeli dla formuły w postaci implikacji dwóch n-formuł.

Przykład 2.3.4. Na Rysunku 2.5 znakiem „+” oznaczymy model, zaś znakiem „–” kontrmodel danej formuły N_0 lub N_2. Rozważmy formułę $\varphi = \sim\sim p \to \sim\neg p$. Ponieważ $\mathcal{M}_{\mathbf{2}}$ oraz $\mathcal{M}^2_{\mathbf{1}}$ są modelami dla formuły $\sim\sim p$ i jednocześnie kontrmodelami dla formuły $\sim\neg p$, zatem są one kontrmodelami dla formuły φ.

	$i(\mathcal{M}_\mathbf{0})$	$i(\mathcal{M}_\mathbf{1})$
p	-	$+$
$\neg\neg p$	$+$	$+$

Rysunek 2.6: Pseudopodmodele przykładowych n-formuł

.

Widać jednak, że zbiór modeli dla p jest taki sam jak dla $\neg\neg p$, co oznaczałoby, że te formuły są równoważne, choć wiadomo, że $\perp$-negacja nie jest inwolutywna. A zatem informacje na temat modeli są niepełne.

W przypadku logiki intuicjonistycznej poszukiwanie kontrmodelu dla formuły $\varphi \to \psi$ można rozpocząć od założenia, że dana implikacja jest sfalsyfikowana już w korzeniu modelu, to znaczy można rozpocząć od założenia, że $\mathbf{r} \Vdash \varphi$ oraz $\mathbf{r} \nVdash \psi$. W przypadku ICL korzeń jest wyróżniony jako jedyny świat, w którym można odrzucić stałą $\perp$ i zarazem, jak zauważyliśmy w punkcie (3) Faktu 2.2.2, jedyny świat, w którym może być odrzucona formuła postaci $\neg\varphi$. Konieczne jest rozpatrzenie forsowania w światach urojonych modeli $\mathcal{M}_\mathbf{0}^2, \mathcal{M}_\mathbf{2}, \mathcal{M}_\mathbf{1}^2$ oraz $\mathcal{M}_\mathbf{3}$. W tym celu wprowadzamy pojęcie *pseudopodmodelu*.

Definicja 2.3.5. Niech $\mathcal{M}$ będzie r-modelem. *Pseudopodmodelem* modelu $\mathcal{M}$ nazywamy podmodel generowany przez dowolny świat urojony należący do modelu.

Innymi słowy pseudopodmodel to dowolny generowany podmodel w sensie IRZ, który nie jest r-modelem, to znaczy model złożony jedynie ze światów urojonych. Pseudopodmodele modeli $\mathcal{M}_\mathbf{0}^2$ oraz $\mathcal{M}_\mathbf{1}^2$ (Rys. 2.4) będziemy oznaczać odpowiednio $i(\mathcal{M}_\mathbf{0})$ oraz $i(\mathcal{M}_\mathbf{1})$. Pseudopodmodelem modelu $\mathcal{M}_\mathbf{2}$ jest $i(\mathcal{M}_\mathbf{1})$, natomiast dla modelu $\mathcal{M}_\mathbf{3}$ istnieją dwa możliwe pseudopodmodele: $i(\mathcal{M}_\mathbf{0})$ oraz $i(\mathcal{M}_\mathbf{1})$.

W Przykładzie 2.3.4 dla formuł p oraz $\neg\neg p$ mamy pseudopodmodele jak na Rys. 2.6. Zatem $i(\mathcal{M}_\mathbf{0}) \Vdash \neg\neg p$ oraz $i(\mathcal{M}_\mathbf{0}) \nVdash p$. Pseudopodmodel $i(\mathcal{M}_\mathbf{0})$ generuje dwa kontrmodele: $\mathcal{M}_\mathbf{0}^2$ oraz $\mathcal{M}_\mathbf{3}$ (por. Przykład 2.3.3).

Opisana powyżej procedura służy do określania czy implikacja dwóch n-formuł jest prawdziwa. Wykorzystując charakteryzację formuł negacyjnych poprzez ich modele i kontrmodele określamy, czy dla danej pary n-formuł zachodzi relacja $N_kp \preceq N_mp$. Dla n-formuły N_kp oznaczmy przez $\mathcal{S}^+(N_kp)$ zbiór modeli, w których ta formuła jest prawdziwa, będący podzbiorem zbioru $\mathcal{S} \cup \{i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$. Relacja $N_kp \preceq N_mp$ pomiędzy dwoma formułami negacyjnymi zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{S}^+(N_kp) \subseteq \mathcal{S}^+(N_mp)$. W szczególności $N_kp \equiv N_mp$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{S}^+(N_kp) = \mathcal{S}^+(N_mp)$. Pełna lista zbiorów $\mathcal{S}^+(N_kp)$ dla poszczególnych n-formuł długości mniejszej niż 6 jest podana w Załączniku 1.

2.4 Charakterystyka fragmentu negacyjnego

Przypomnijmy, że n-formuła z nieparzystym ciągiem negacji nie może być równoważna n-formule z parzystą liczbą negacji. W związku z tym własności dotyczące równoważności n-formuł dzielą się na dwie klasy: dla parzystych i dla nieparzystych n-formuł. Większość dowodów własności formuł negacyjnych jest semantyczna, w przypadku implikacji między konkretnymi formułami (tam gdzie nie występuje nieokreślony ciąg negacji) posługujemy się rachunkiem LJC.

Własność pozwalająca redukować ciągi negacji tego samego typu wynika z faktu, że zarówno $\sim\sim\sim p \equiv \sim p$ jak i $\neg\neg\neg p \equiv \neg p$.

Lemat 2.4.1. *Dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$ zachodzą następujące własności:*

(1) $\sim^{(2k+2)}p \equiv \sim\sim p$,

(2) $\sim^{(2k+1)}p \equiv \sim p$,

(3) $\neg^{(2k+2)}p \equiv \neg\neg p$,

(4) $\neg^{(2k+1)}p \equiv \neg p$.

Dowód. Ad (1) oraz (2)
Z faktu, że $\vdash_{\mathsf{IRZ}} \sim p \leftrightarrow \sim\sim\sim p$ oraz z Twierdzenia o ekstensjonalności otrzymujemy tezę.

Ad (3) oraz (4)
Faktycznie $\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p;[\,]} \qquad \dfrac{}{\bot, p \vdash \bot;[\,]}}{\neg p, p \vdash \bot;[\,]}}{p \vdash \neg\neg p;[\,]} \qquad \dfrac{}{\bot, p \vdash \bot;[\,]}}{p, \neg\neg\neg p \vdash \bot;[\,]}}{\neg\neg\neg p \vdash \neg p;[\,]}}{\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p;[\,]}$$

Podobnie $\vdash \neg p \to \neg\neg\neg p$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg p \vdash \neg p;[\,]} \qquad \dfrac{}{\bot, p \vdash \bot;[\,]}}{\neg\neg p, \neg p \vdash \bot;[\,]}}{\neg p \vdash \neg\neg\neg p;[\,]}}{\vdash \neg p \to \neg\neg\neg p;[\,]}$$

A zatem w szczególności $\neg\neg\neg p \equiv \neg p$, a w ogólności z Twierdzenia 2.2.3 otrzymujemy tezę. □

Liang i Miller w pracy [37] wyszczególnili formułę $\sim\neg\varphi \to \varphi$. Pozwala ona emulować operator kontrolny $\mathcal{C}$. Z punktu (1) kolejnego lematu wynika, że formuła $\sim\neg p$ reprezentuje klasę równoważnych n-formuł postaci $\sim\neg N_{2k}p$. W punkcie (2) zaprezentowana jest analogiczna klasa dla formuł z nieparzystym ciągiem negacji.

Lemat 2.4.2. *Dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

(1) $\sim\neg N_{2k}p \equiv \sim\neg p$,

(2) $\sim\neg N_{2k+1}p \equiv \sim\neg\neg p$.

Dowód. Ad (1)
Załóżmy niewprost, że istnieje r-model $\mathcal{M}$, w którym $\mathbf{r} \nVdash \sim\neg N_{2k}p \to \sim\neg p$. Istnieje więc świat $u \geqslant \mathbf{r}$, taki że

$$u \Vdash \sim\neg N_{2k}p \text{ oraz } u \nVdash \sim\neg p,$$

to znaczy we wszystkich światach powyżej u odrzucona jest formuła $\neg N_{2k}p$, a zatem kontrmodel składa się jedynie z korzenia oraz $\mathbf{r} \Vdash N_{2k}p$. Z punktu (1) Lematu 2.3.1 otrzymujemy $\mathbf{r} \Vdash p$. Z kolei odrzucenie w korzeniu formuły $\sim\neg p$ w szczególności pociąga $\mathbf{r} \nVdash p$. Sprzeczność.

Niech $\mathbf{r}$ będzie korzeniem r-modelu, w którym nie jest spełniona formuła $\sim\neg p \to \sim\neg N_{2k}p$. Stąd dla pewnego świata $u \geqslant \mathbf{r}$ mamy

$$u \Vdash \sim\neg p \text{ oraz } u \nVdash \sim\neg N_{2k}p. \tag{2.1}$$

Forsowanie formuły $\sim\neg p$ w dowolnym świecie oznacza, że jedynym kontrmodelem jest $\mathcal{M}_{\mathbf{1}}$. Na mocy punktu (3) Lematu 2.3.1 w odniesieniu do drugiej części warunku (2.1) otrzymujemy $\mathbf{r} \nVdash p$. Sprzeczność.

Dowód punktu (2) jest analogiczny. □

Lemat 2.4.1 oraz Lemat 2.4.2 pokazują, że w wielu przypadkach można zredukować n-formułę do pewnej formuły długości mniejszej niż 4. Co więcej, formuła $\sim\neg p$ pociąga dowolną n-formułę z parzystą liczbą negacji. To znaczy jest najmniejszym elementem w podzbiorze parzystych n-formuł uporządkowanym relacją $\preceq$. Analogicznie formuła $\sim\neg\neg p$ jest najmniejszym elementem w zbiorze nieparzystych n-formuł. Te dwa fakty są wnioskami z punktów (1) i (2) Lematu 2.4.2 oraz następującego lematu:

Lemat 2.4.3. *Dla dowolnych $k, m \in \mathbb{N}$ następujące implikacje są prawdziwe:*

(1) $\sim\neg N_{2k}p \to N_{2m}p$,

(2) $\sim\neg N_{2k+1}p \to N_{2m+1}p$.

Dowód. Ad (1)
Załóżmy, że istnieje r-model $\mathcal{M}$, taki że $\mathbf{r} \nVdash \sim\neg N_{2k}p \to N_{2m}p$. Wówczas dla pewnego świata $u \geqslant \mathbf{r}$ mamy $u \Vdash \sim\neg N_{2k}p$ oraz $u \nVdash N_{2m}p$. Pierwszy warunek oznacza, że korzeń jest jedynym światem modelu $\mathcal{M}$ i na mocy punktu (2) Lematu 2.2.2 otrzymujemy $\mathbf{r} \Vdash N_{2k}p$. A to wobec założenia $\mathbf{r} \nVdash N_{2m}p$ prowadzi do sprzeczności.

Ad (2)
Rozważmy r-model $\mathcal{M}$, w którym $\mathbf{r} \nVdash \sim\neg N_{2k+1}p \to N_{2m+1}p$. Istnieje zatem świat $u \geqslant \mathbf{r}$, taki że $u \Vdash \sim\neg N_{2k+1}p$ oraz $u \nVdash N_{2m+1}p$. Stąd, analogicznie jak w punkcie (1), skoro korzeń jest jedynym światem modelu $\mathcal{M}$, otrzymujemy $\mathbf{r} \Vdash N_{2k+1}p$ oraz $\mathbf{r} \nVdash N_{2m+1}p$, sprzeczność. □

Warto w tym miejscu wyróżnić n-formuły $\sim\sim\neg\neg p$ oraz $\sim\sim\neg p$, które są największymi elementami względem relacji $\preceq$ odpowiednio w zbiorze parzystych i nieparzystych n-formuł.

Lemat 2.4.4. *Następujące implikacje są prawdziwe dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$:*

(1) $N_{2k}p \to \sim\sim\neg\neg p$,

(2) $N_{2k+1}p \to \sim\sim\neg p$.

Dowód. Ad (1)
Niech $\mathcal{M}$ będzie r-modelem, w którym odrzucona jest formuła $N_{2k}p \to \sim\sim\neg\neg p$. A zatem powyżej korzenia musi istnieć świat u, taki że $u \Vdash N_{2k}p$ oraz $u \nVdash \sim\sim\neg\neg p$. Drugi z tych warunków oznacza, że jedynym kontrmodelem jest $\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$. A zatem stąd, że $u \Vdash N_{2k}p$ na mocy (1) w Lemacie 2.3.1 otrzymujemy w szczególności $\mathbf{r} \Vdash p$, sprzeczność.

Dowód punktu (2) jest analogiczny. □

Dla ustalonej liczby $k \in \mathbb{N}$ istnieje co najwyżej 2^k n-formuł $N_k p$. Wiemy już, że wszystkich nierównoważnych formuł negacyjnych jest co najwyżej 32. W poniższych faktach dotyczących równoważności i nieredukowalności n-formuł, gdy nie podano explicite dowodów, odsyłamy do relacji między odpowiadającymi formułom zbiorom modeli (por. Załącznik 1). Jednak w większości przypadków podajemy dowody w rachunku sekwentów LJC. Jako reprezentanta każdej z klas równoważności wybierzemy formułę z możliwie najkrótszym ciągiem negacji. Wyróżnimy na początek trzy klasy abstrakcji najkrótszych n-formuł, to znaczy

$$[p]_\equiv, [\sim p]_\equiv \text{ oraz } [\neg p]_\equiv$$

i omówimy pokrótce kolejne z nich.

Fakt 2.4.5. *Wszystkie n-formuły długości* 2 *są parami nierównoważne.*

Dowód. Podajemy przykładowe kontrmodele dla implikacji dwóch n-formuł długości 2.

$$\mathcal{M}_{\mathbf{0}}^2 \nVdash \neg\sim p \to \neg\neg p$$

$$\mathcal{M}_{\mathbf{0}}^2 \nVdash \neg\sim p \to \sim\sim p$$

$$\mathcal{M}_{\mathbf{1}}^2 \nVdash \neg\sim p \to \sim\neg p$$

$$\mathcal{M}^2_{\mathbf{0}} \nVdash \neg\neg p \to \neg{\sim}p$$

$$\mathcal{M}^2_{\mathbf{0}} \nVdash \neg\neg p \to {\sim}{\sim}p$$

$$\mathcal{M}^2_{\mathbf{0}} \nVdash \neg\neg p \to {\sim}\neg p$$

$$\mathcal{M}_{\mathbf{2}} \nVdash {\sim}{\sim}p \to \neg\neg p$$

$$\mathcal{M}_{\mathbf{2}} \nVdash {\sim}{\sim}p \to {\sim}\neg p$$

□

Żadna z formuł N_2p nie jest redukowalna, więc otrzymujemy cztery klasy abstrakcji:

$$[{\sim}{\sim}p]_\equiv, [{\sim}\neg p]_\equiv, [\neg{\sim}p]_\equiv, [\neg\neg p]_\equiv.$$

Istnieje 8 n-formuł postaci N_3p. Z Lematu 2.4.1 wynika, że ${\sim}{\sim}{\sim}p$ i $\neg\neg\neg p$ są redukowalne odpowiednio do ${\sim}p$ i $\neg p$.

Fakt 2.4.6. *Istnieją dokładnie dwie nieredukowalne n-formuły N_3p nierównoważne z żadną n-formułą długości* 3*:* $\neg{\sim}{\sim}p$ oraz $\neg\neg{\sim}p$*.*

W punkcie (2) Lematu 2.4.4 wyszczególniliśmy formułę ${\sim}{\sim}\neg p$ jako element największy w zbiorze nieparzystych n-formuł z zadanym porządkiem implikacyjnym. Istnieje równoważna jej n-formuła długości 3, którą z pewnych względów wybierzemy na reprezentanta tej klasy abstrakcji.

Fakt 2.4.7. *Dla n-formuł długości* 3 *prawdziwe są następujące równoważności:*

(1) ${\sim}{\sim}\neg p \equiv \neg{\sim}\neg p$,

(2) ${\sim}\neg{\sim}p \equiv {\sim}\neg\neg p$.

Dowód. Ad (1)
$\vdash {\sim}{\sim}\neg p \to \neg{\sim}\neg p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{{\sim}\neg p \vdash {\sim}\neg p; [\,]} \qquad \dfrac{}{0, {\sim}\neg p \vdash \bot; [\,]}}{{\sim}\neg p, {\sim}{\sim}\neg p \vdash \bot; [\,]}}{{\sim}{\sim}\neg p \vdash \neg{\sim}\neg p; [\,]}}{\vdash {\sim}{\sim}\neg p \to \neg{\sim}\neg p; [\,]}$$

$\vdash \neg{\sim}\neg p \to {\sim}{\sim}\neg p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{{\sim}\neg p \vdash {\sim}\neg p;[\,]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot, p \vdash \bot;[\,]}}{\bot \vdash \neg p;[\,]} \quad \dfrac{}{\bot, 0 \vdash 0;[\,]}}{\bot, {\sim}\neg p \vdash 0;[\,]}}{\neg{\sim}\neg p, {\sim}\neg p \vdash 0;[\,]}}{\neg{\sim}\neg p \vdash {\sim}{\sim}\neg p;[\,]}}{\vdash \neg{\sim}\neg p \to {\sim}{\sim}\neg p;[\,]}$$

Ad (2)

$\vdash {\sim}\neg{\sim} p \to {\sim}\neg\neg p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p;[\,]} \quad \dfrac{}{0, p \vdash \bot;[\,]}}{{\sim}p, p \vdash \bot;[\,]}}{{\sim}p \vdash \neg p;[\,]} \qquad \dfrac{}{{\sim}p, \bot \vdash \bot;[\,]}}{{\sim}p, \neg\neg p \vdash \bot : [\,]}}{\neg\neg p \vdash \neg{\sim}p;[\,]} \qquad \dfrac{}{0, \neg\neg p \vdash 0;[\,]}}{{\sim}\neg{\sim}p, \neg\neg p \vdash 0;[\,]}}{{\sim}\neg{\sim}p \vdash {\sim}\neg\neg p;[\,]}}{\vdash {\sim}\neg{\sim}p \to {\sim}\neg\neg p;[\,]}$$

$\vdash {\sim}\neg\neg p \to {\sim}\neg{\sim} p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p;[\,]} \quad \dfrac{}{\bot, p \vdash \bot;[\,]}}{\neg p, p \vdash \bot;[\,]}}{p \vdash \neg\neg p;[\,]} \qquad \dfrac{}{0, p \vdash 0;[\,]}}{p, {\sim}\neg\neg p \vdash 0;[\,]}}{{\sim}\neg\neg p \vdash {\sim}p;[\,]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg p, \bot \vdash \bot;[\,]}}{\bot \vdash \neg\neg p;[\,]} \quad \dfrac{}{0, \bot \vdash 0;[\,]}}{\bot, {\sim}\neg\neg p \vdash 0;[\,]}}{\neg{\sim}p, {\sim}\neg\neg p \vdash 0;[\,]}}{{\sim}\neg\neg p \vdash {\sim}\neg{\sim}p;[\,]}}{\vdash {\sim}\neg\neg p \to {\sim}\neg{\sim}p;[\,]}$$

$\square$

Z Lematu 2.4.1.(2), Lematu 2.4.1.(4), Faktu 2.4.6 oraz Faktu 2.4.7 wynika, że istnieją tylko 4 nieredukowalne, parami nierównoważne n-formuły N_3p. Arbitralnie wybieramy następujących reprezentantów klas abstrakcji:

$$[\sim\neg\neg p]_\equiv, [\neg\neg\sim p]_\equiv, [\neg\sim\sim p]_\equiv \text{ oraz } [\neg\sim\neg p]_\equiv.$$

Większość formuł negacyjnych N_4p można zredukować do jednej z formuł N_2p korzystając z Lematu 2.4.1 lub Lematu 2.4.2. Pozostałe formuły należą do jednej z trzech klas abstrakcji.

Fakt 2.4.8. *Dla n-formuł długości* 4 *zachodzą następujące równoważności:*

(1) $\sim\sim\neg\sim p \equiv \neg\sim\neg\sim p \equiv \sim\sim\neg\neg p \equiv \neg\sim\neg\neg p$,

(2) $\neg\neg\sim\neg p \equiv \neg\sim\sim\neg p$.

Dowód. Ad (1)

Dowód równoważności $\sim\sim\neg\sim p \equiv \neg\sim\neg\sim p$ oraz $\sim\sim\neg\neg p \equiv \neg\sim\neg\neg p$ wynika z Faktu 2.4.7 (1) i z Twierdzenia o ekstensjonalności (Tw. 2.2.3).

$\vdash \sim\sim\neg\neg p \to \neg\sim\neg\sim p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(*)}{\sim\neg\sim p \vdash \sim\neg\neg p; [\,]} \qquad \dfrac{}{0, \sim\neg\sim p \vdash \bot; [\,]}}{\sim\neg\sim p, \sim\sim\neg\neg p \vdash \bot; [\,]}}{\sim\sim\neg\neg p \vdash \neg\sim\neg\sim p; [\,]}}{\vdash \sim\sim\neg\neg p \to \neg\sim\neg\sim p; [\,]}$$

Pominięta część dowodu $(*)$ jak w dowodzie punktu (2) Faktu 2.4.7.

$\vdash \neg\sim\neg\sim p \to \sim\sim\neg\neg p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(**)}{\sim\neg\neg p \vdash \sim\neg\sim p; [\,]} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg p, \bot \vdash \bot; [\,]}}{\bot \vdash \neg\neg p; [\,]} \qquad \dfrac{}{0, \bot \vdash 0; [\,]}}{\bot, \sim\neg\neg p \vdash 0; [\,]}}{\sim\neg\neg p, \neg\sim\neg\sim \vdash 0; [\,]}}{\neg\sim\neg\sim p \vdash \sim\sim\neg\neg p; [\,]}}{\vdash \neg\sim\neg\sim p \to \sim\sim\neg\neg p; [\,]}$$

Pominięta część dowodu $(**)$ jak w dowodzie punktu (2) Faktu 2.4.7.

Ad (2)

$\vdash \neg\neg{\sim}\neg p \to \neg{\sim}{\sim}\neg p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{{\sim}\neg p \vdash {\sim}\neg p; [\,]} \quad \dfrac{}{0, {\sim}\neg p \vdash \bot; [\,]}}{{\sim}\neg p, {\sim}{\sim}\neg p \vdash \bot; [\,]}}{{\sim}{\sim}\neg p \vdash \neg{\sim}\neg p; [\,]} \quad \dfrac{}{\bot, {\sim}{\sim}\neg p \vdash \bot; [\,]}}{{\sim}{\sim}\neg p, \neg\neg{\sim}\neg p \vdash \bot; [\,]}}{\neg\neg{\sim}\neg p \vdash \neg{\sim}{\sim}\neg p; [\,]}}{\vdash \neg\neg{\sim}\neg p \to \neg{\sim}{\sim}\neg p; [\,]}$$

$\vdash \neg{\sim}{\sim}\neg p \to \neg\neg{\sim}\neg p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{{\sim}\neg p \vdash {\sim}\neg p; [\,]} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot, p \vdash \bot; [\,]}}{\bot \vdash \neg p; [\,]} \quad \dfrac{}{\bot, 0 \vdash 0; [\,]}}{\bot, {\sim}\neg p \vdash 0; [\,]}}{\neg{\sim}\neg p, {\sim}\neg p \vdash 0; [\,]}}{\neg{\sim}\neg p \vdash {\sim}{\sim}\neg p; [\,]} \quad \dfrac{}{\bot, \neg{\sim}\neg p \vdash \bot; [\,]}}{\dfrac{\neg{\sim}\neg p, \neg{\sim}{\sim}\neg p \vdash \bot; [\,]}{\neg{\sim}{\sim}\neg p \vdash \neg\neg{\sim}\neg p; [\,]}}}{\vdash \neg{\sim}{\sim}\neg p \to \neg\neg{\sim}\neg p; [\,]}$$

□

Warto zauważyć, że formuły równoważne na mocy punktu (2) powyższego faktu to zanegowane $\bot$-negacją nierównoważne formuły $\neg{\sim}\neg p$ i ${\sim}{\sim}\neg p$.

Fakt 2.4.9. *Formuła $\neg\neg{\sim}{\sim}p$ jest jedyną nieredukowalną n-formułą długości 4 nierównoważną z żadną inną formułą negacyjną postaci $N_4 p$.*

Podsumowując, możemy wyróżnić trzy klasy abstrakcji dla nierównoważnych, nieredukowalnych n-formuł długości 4:

$$[\neg{\sim}{\sim}\neg p]_\equiv, [\neg\neg{\sim}{\sim}p]_\equiv \text{ oraz } [\neg{\sim}\neg\neg p]_\equiv.$$

Zauważmy, że element największy w zbiorze parzystych n-formuł, który wyszczególniliśmy w punkcie (1) Lematu 2.4.4, czyli formuła ${\sim}{\sim}\neg\neg p$ należy do klasy $[\neg{\sim}\neg\neg p]_\equiv$. Tutaj również jako reprezentanta tej klasy abstrakcji wybraliśmy n-formułę, w której ciąg negacji zaczyna się od $\bot$-negacji.

Fakt 2.4.10. *Istnieją dokładnie 4 nieredukowalne n-formuły długości 5, wszystkie równoważne:* $\neg{\sim}{\sim}\neg{\sim}p \equiv \neg{\sim}{\sim}\neg\neg p \equiv \neg\neg{\sim}\neg{\sim}p \equiv \neg\neg{\sim}\neg\neg p$.

Dowód. Dowód równoważności $\neg{\sim}{\sim}\neg{\sim}p \equiv \neg\neg{\sim}\neg{\sim}p$ oraz równoważności $\neg{\sim}{\sim}\neg\neg p \equiv \neg\neg{\sim}\neg\neg p$ wynika z Faktu 2.4.8 (2) i z Twierdzenia o ekstensjonalności (Tw. 2.2.3).

$\vdash \neg\neg{\sim}\neg{\sim}p \to \neg{\sim}{\sim}\neg\neg p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{*}{{\sim}{\sim}\neg\neg p \vdash \neg{\sim}\neg{\sim}p; [\,]} \qquad \dfrac{}{\bot, {\sim}{\sim}\neg\neg p \vdash \bot; [\,]}}{{\sim}{\sim}\neg\neg p, \neg\neg{\sim}\neg{\sim}p \vdash \bot; [\,]}}{\neg\neg{\sim}\neg{\sim}p \vdash \neg{\sim}{\sim}\neg\neg p; [\,]}$$

Pomijamy część dowodu ($*$) analogiczną jak w punkcie (1) Faktu 2.4.8.

$\vdash \neg{\sim}{\sim}\neg\neg p \to \neg\neg{\sim}\neg{\sim}p$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(**)}{\neg{\sim}\neg{\sim}p \vdash {\sim}{\sim}\neg\neg p; [\,]} \qquad \dfrac{}{\bot, \neg{\sim}\neg{\sim}p \vdash \bot; [\,]}}{\neg{\sim}\neg{\sim}p, \neg{\sim}{\sim}\neg\neg p \vdash \bot; [\,]}}{\vdash \neg{\sim}{\sim}\neg\neg p \to \neg\neg{\sim}\neg{\sim}p; [\,]}$$

Pominięta część dowodu ($**$) analogicznie jak w punkcie (1) Faktu 2.4.8.

□

Powyższa klasa równoważności będzie oznaczana

$$[\neg{\sim}{\sim}\neg\neg p]_{\equiv}.$$

Wszystkie pozostałe n-formuły $N_5 p$ są redukowalne do jednej z formuł $N_3 p$, wynika to z Lematu 2.4.1, Lematu 2.4.2 oraz Twierdzenia o ekstensjonalności. Jedynym nieoczywistym przypadkiem jest $\neg\neg{\sim}{\sim}\neg p \equiv {\sim}{\sim}\neg p$. Implikacja w lewą stronę jest rezultatem własności udowodnionej w Przykładzie 2.1.3. Z drugiej strony, obie rozważane n-formuły mają identyczny zbiór modeli, w których są one prawdziwe:

$$\mathcal{S}^+(\neg\neg{\sim}{\sim}\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{0}}^2, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}_{\mathbf{1}}^2, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\} = \mathcal{S}^+({\sim}{\sim}\neg p),$$

a zatem te formuły są równoważne.

Lemat 2.4.11. *Każda n-formuła $N_6 p$ jest redukowalna do pewnej n-formuły $N_k p$, gdzie $k \leqslant 4$.*

Dowód. Dla każdej n-formuły $N_6 p$ istnieje odpowiedni ciąg N_5 taki, że albo $N_6 p = {\sim} N_5 p$ albo $N_6 p = \neg N_5 p$. Rozważmy oba przypadki.

Przypadek 1. Formuła $N_5 p$ jest redukowalna do pewnej n-formuły $N_3 p$. Wówczas albo $N_6 p \equiv {\sim} N_3 p$, albo $N_6 p \equiv \neg N_3 p$.

Przypadek 2. Formuła $N_5 p$ jest nieredukowalna. Wówczas z Faktu 2.4.10 wynika, że $N_5 p \in [\neg{\sim}{\sim}\neg\neg p]_{\equiv}$. Jeżeli $N_6 p = {\sim} N_5 p$, to w szczególności $N_6 p \equiv {\sim}\neg{\sim}{\sim}\neg\neg p$, a zatem z Lematu 2.4.2.(1) otrzymujemy $N_6 p \equiv {\sim}\neg p$. Jeśli natomiast $N_6 p = \neg N_5 p$, to w szczególności $N_6 p \equiv \neg\neg\neg{\sim}\neg\neg p$. Na mocy punktu (4) Lematu 2.4.1 otrzymujemy $N_6 p \equiv \neg{\sim}\neg\neg p$. □

Twierdzenie 2.4.12. *Każdą n-formułę $N_k p$ długości $k \geqslant 6$ można zredukować do pewnej n-formuły długości co najwyżej* 5.

Dowód. Indukcja względem długości k. Baza indukcji wynika z Lematu 2.4.11.

Załóżmy, że $k \geqslant 6$. Rozważymy równocześnie dwa analogiczne przypadki dla $\sharp \in \{{\sim}, \neg\}$. Niech $N_{k+1} p = \sharp N_k p$. Na mocy założenia indukcyjnego istnieje ciąg negacji N_m, taki że $m \leqslant 5$ oraz $N_k p \equiv N_m p$. A zatem $N_{k+1} p \equiv \sharp N_m p$. Jeżeli $m < 5$, otrzymujemy tezę. W przeciwnym wypadku, mamy do czynienia z bazą indukcji. □

Jako wniosek z powyższych twierdzeń, w szczególności z Faktów 2.4.5–2.4.10, Lematu 2.4.11 oraz Twierdzenia 2.4.12 możemy podać explicite moc zbioru $\mathcal{N}/_{\equiv}$.

Twierdzenie 2.4.13. *Istnieje dokładnie* 15 *(z dokładnością do równoważności) nieredukowalnych, parami nierównoważnych n-formuł:*

$$p, \quad {\sim}{\sim}p, \quad {\sim}\neg p, \quad \neg{\sim}p, \quad \neg\neg p, \quad \neg{\sim}\neg\neg p, \quad \neg{\sim}{\sim}\neg p, \quad \neg\neg{\sim}{\sim}p,$$
$${\sim}p, \quad \neg p, \quad \neg{\sim}\neg p, \quad {\sim}\neg\neg p, \quad \neg{\sim}{\sim}p, \quad \neg\neg{\sim}p, \quad \neg{\sim}{\sim}\neg\neg p.$$

Dwa poniższe twierdzenia kompletują wszystkie nietrywialne relacje pomiędzy elementami zbioru $\mathcal{N}/_{\equiv}$. Przedstawiamy je w postaci implikacji n-formuł dla wybranych reprezentantów poszczególnych elementów rozważanego zbioru ilorazowego. Stwierdzając, że prawdziwa jest implikacja postaci $N_k p \to N_m p$ mamy na uwadze to, że implikacja przeciwna nie zachodzi.

Twierdzenie 2.4.14. *Następujące implikacje n-formuł parzystej długości są prawdziwe:*

(1) $\sim\neg p \to p$

(2) $p \to \neg\neg p$

(3) $\neg\neg p \to \neg\neg\sim\sim p$

(4) $\neg\neg\sim\sim p \to \neg\sim p$

(5) $\neg\sim p \to \neg\sim\neg\neg p$

(6) $\sim\neg p \to \neg\sim\sim\neg p$

(7) $\neg\sim\sim\neg p \to \neg\neg p$

(8) $p \to \sim\sim p$

(9) $\sim\sim p \to \neg\neg\sim\sim p$

Twierdzenie 2.4.15. *Następujące implikacje n-formuł długości nieparzystej są prawdziwe:*

(1) $\sim\neg\neg p \to \sim p$

(2) $\sim p \to \neg\neg\sim p$

(3) $\neg\neg\sim p \to \neg\sim\sim p$

(4) $\neg\sim\sim p \to \neg p$

(5) $\neg p \to \neg\sim\neg p$

(6) $\sim\neg\neg p \to \neg\sim\sim\neg\neg p$

(7) $\neg\sim\sim\neg\neg p \to \neg\neg\sim p$

Dowód. W ramach dowodu Twierdzenia 2.4.14 oraz Twierdzenia 2.4.15 odsyłamy Czytelnika do spisu zbiorów modeli $\mathcal{S}^+$ dla n-formuł w Załączniku 1. Prawdziwość formuły $N_k p \to N_m p$ można sprowadzić do sprawdzenia czy $\mathcal{S}^+(N_k p) \subsetneq \mathcal{S}^+(N_m p)$. Na przykład w punkcie (7) Twierdzenia 2.4.15 mamy

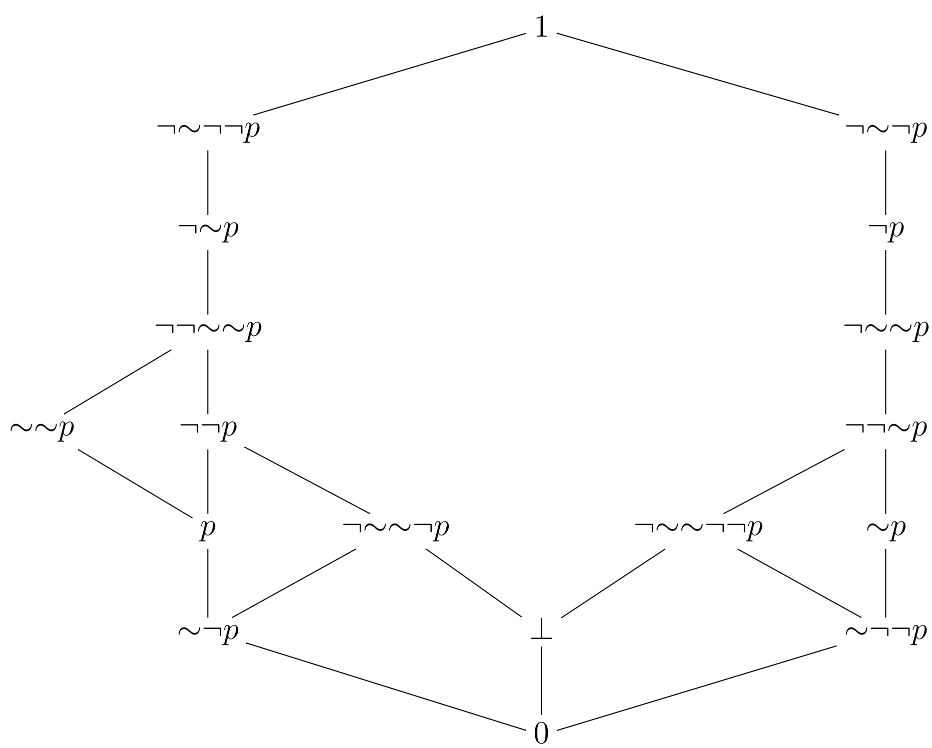
$$\mathcal{S}^+(\neg\sim\sim\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$$

oraz

$$\mathcal{S}^{+}(\neg\neg{\sim}p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{0}}^{2}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}.$$

□

Niech $\mathcal{N}^*$ będzie zbiorem wybranych reprezentantów elementów zbioru ilorazowego $\mathcal{N}/_{\equiv}$. Na Rysunku 2.7 prezentujemy poset (zbiór częściowo uporządkowany) $(\mathcal{N}^* \cup \{0, \bot, 1\}, \preceq)$.



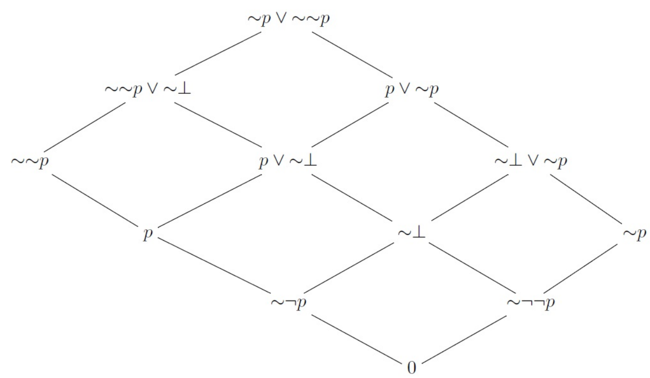
Rysunek 2.7: Poset fragmentu negacyjnego ICL

Rozważmy dwa fragmenty posetu $(\mathcal{N}^* \cup \{0, \bot, 1\}, \preceq)$: formuły

$$\mathcal{D} = \{p, {\sim}p, {\sim}{\sim}p, {\sim}\neg p, {\sim}\neg\neg p\}$$

oraz zbiór pozostałych formuł czyli $\mathcal{N}^* \setminus \mathcal{D}$. Dla dowolnej formuły φ ze zbioru $\mathcal{N}^* \setminus \mathcal{D}$ zachodzi własność

$$\vdash \bot \to \varphi.$$



Rysunek 2.8: Krata zbioru $\mathcal{D}$

Wynika stąd, że każda z tych formuł jest zawsze forsowana we wszystkich światach urojonych dowolnego modelu. Aby podkreślić tę własność, wybrany reprezentant każdej z klas abstrakcji z tej części posetu jest przedstawiony w postaci $\neg N_k p$. Z punktu (4) Faktu 2.2.2 wynika, że zbiór $\mathcal{N}^* \setminus \mathcal{D}$ składa się z formuł, które można odrzucić jedynie w korzeniu pewnego modelu.

Przypomnijmy, że w przypadku ściśle intuicjonistycznym domknięcie fragmentu negacyjnego $p, \sim p, \sim\sim p$ na koniunkcję i alternatywę prowadzi do kraty przedstawionej na Rysunku 2.3. Wszystkie te formuły można znaleźć w zbiorze $\mathcal{D}$. Domknięcie tej części na operację koniunkcji i alternatywy skutkuje powstaniem skończonej kraty z Rysunku 2.8.

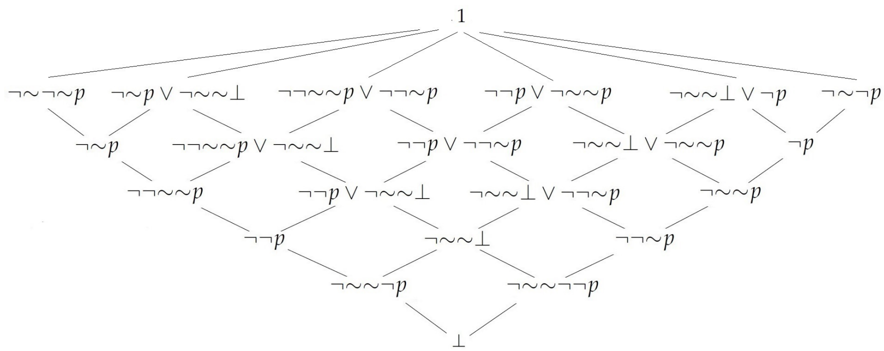
Warto zauważyć, że formuła postaci $\sim\neg p \vee \sim\neg\neg p$ jest równoważna formule domkniętej (niezależnej od zmiennej p), a mianowicie $\sim\bot$. Jedynymi r-modelami dla takiej formuły są modele jednoelementowe, złożone jedynie z korzenia, z dowolną waluacją zmiennej p, czyli r-model $\mathcal{M}_\mathbf{1}$ w którym $\mathbf{r} \Vdash p$ oraz r-model $\mathcal{M}_\mathbf{0}$ w którym $\mathbf{r} \nVdash p$.

Przedstawienie domknięcia na operacje alternatywy i koniunkcji zbioru $\mathcal{N}^* \setminus \mathcal{D}$ byłoby zbyt skomplikowane. Zamiast tego prezentujemy dolną i górną półkratę (Rys. 2.9 i Rys. 2.10). Ponownie otrzymujemy dwie formuły domknięte:

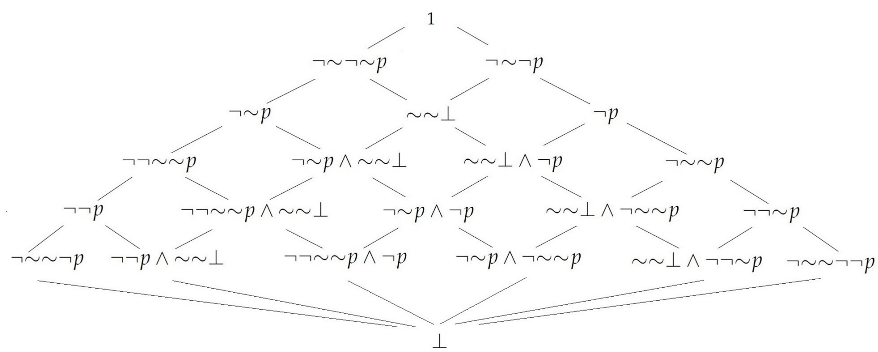
$$\neg\sim\sim\bot \equiv \neg\sim\sim\neg p \vee \neg\sim\sim\neg\neg p,$$

$$\sim\sim\bot \equiv \neg\sim\neg\sim p \wedge \neg\sim\neg p.$$

Jak poprzednio, można je scharakteryzować semantycznie poprzez ich modele. Modelami dla formuły $\sim\sim\bot$ są wszystkie możliwe r-modele oprócz modeli jednoelementowych. Jedynymi modelami dla formuły $\neg\sim\sim\bot$, podobnie



Rysunek 2.9: Półkrata zbioru $\mathcal{N}^* \setminus \mathcal{D}$ domknięta na operację supremum



Rysunek 2.10: Półkrata zbioru $\mathcal{N}^* \setminus \mathcal{D}$ domknięta na operację infimum

jak w przypadku formuły $\sim\perp$, są r-modele złożone jedynie z korzenia, czyli $\mathcal{M}_{\mathbf{1}}$ oraz $\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$. Mimo tego te dwie formuły nie są równoważne. Formuła $\neg\sim\sim\perp$ jest forsowana we wszystkich możliwych pseudopodmodelach, natomiast formułę $\sim\perp$ można odrzucić w pewnym świecie urojonym.

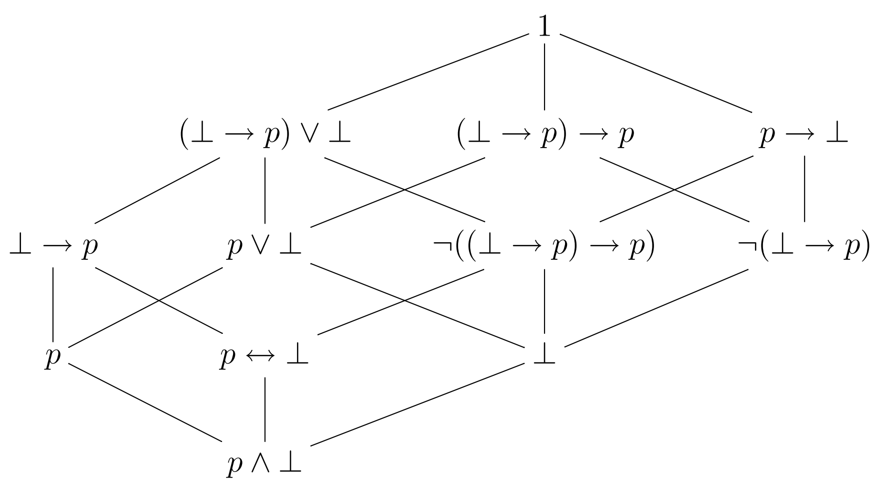
2.5 Fragment „klasyczny”

Jednym z najlepiej znanych fragmentów Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej jest fragment monadyczny scharakteryzowany przez tak zwaną kratę Riegera-Nishimury [46, 44].

Definicja 2.5.1. *Kratę Riegera-Nishimury* tworzą z dokładnością do równoważności formuły monadyczne Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej zdefiniowane w następujący sposób:

1. $g_0(\varphi) = f_0(\varphi) := \varphi$,
2. $g_1(\varphi) = f_1(\varphi) := \sim\varphi$,
3. $g_2(\varphi) := \sim\sim\varphi$,
4. $g_3(\varphi) := \sim\sim\varphi \to \varphi$,
5. $g_{n+4}(\varphi) := g_{n+3}(\varphi) \to g_n(\varphi) \vee g_{n+1}(\varphi)$,
6. $f_{n+2}(\varphi) := g_n(\varphi) \vee g_{n+1}(\varphi)$.

Każda formuła monadyczna $\varphi(p)$ IRZ jest równoważna jednej z formuł $0, 1, f_n(p)$ lub $g_m(p)$, $n \geqslant 2, m \geqslant 0$, zdefiniowanych w powyższej definicji. Zbiór tych formuł tworzy algebrę Lindenbauma monadycznego fragmentu logiki intuicjonistycznej i składa się z nieskończenie wielu różnych klas równoważności formuł. Przypomnijmy, że o ile formuła ICL nie zawiera stałej $\perp$ jako podformuły, jest ona zwykłą formułą intuicjonistyczną. A zatem fragment monadyczny ICL w języku $(0, 1, \vee, \wedge, \to, p)$ jest kratą Riegera-Nishimury.



Rysunek 2.11: Fragment monadyczny $(\perp, p, \to, \vee, \wedge)$

Stała $\bot$ w Intuicjonistycznej Logice Kontrolnej jest traktowana jako dodatkowe falsum. Jednakże we fragmencie monadycznym ICL, w którym $\bot$ potraktujemy jako falsum „klasyczne” zamiast intuicjoinstycznego falsum, przestaje ono być elementem minimalnym w kracie. W odróżnieniu od przypadku intuicjonistycznego, nie jest prawdą, że $p \wedge \bot \equiv \bot$, ponieważ $\nvdash \bot \to p$. Widać, że nie można oczekiwać bezpośredniego analogonu kraty Riegera-Nishimury.

Twierdzenie 2.5.2. *Fragment monadyczny* ICL *w języku* $(\bot, p, \to, \vee, \wedge)$ *jest skończony i reprezentuje go algebra przedstawiona na Rysunku 2.11.*

Dowód. Prezentujemy dowody nieoczywistych implikacji z kraty. W Załączniku 2 zamieszczamy zbiory klas abstrakcji formuł z tego fragmentu.

$\vdash (((\bot \to p) \to p) \to \bot) \to ((\bot \to p) \vee \bot)$
Dla przejrzystości zapisu na potrzeby tego dowodu niech $\varphi = (\bot \to p) \to p$ oraz $\psi = ((\bot \to p) \to \bot) \to \bot$ (por. równoważność ze wzoru (2.2)). Z konieczności rozdzielamy drzewo dowodowe na dwie części.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(*)}{\vdash \bot; [\psi, \varphi]} \qquad \dfrac{}{p \vdash p; [\psi, \varphi]}}{\bot \to p \vdash p; [\psi, \varphi]}}{\vdash (\bot \to p) \to p; [\psi, \varphi]}}{\vdash (\bot \to p) \to p; [\psi]} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\bot \to p) \to \bot, \bot \vdash \bot; [\psi]}}{\bot \vdash ((\bot \to p) \to \bot) \to \bot; [\psi]}}{\dfrac{((\bot \to p) \to p) \to \bot \vdash ((\bot \to p) \to \bot) \to \bot; [\psi]}{((\bot \to p) \to p) \to \bot \vdash ((\bot \to p) \to \bot) \to \bot; [\,]}}}{\vdash (((\bot \to p) \to p) \to \bot) \to (((\bot \to p) \to \bot) \to \bot); [\,]}
$$

Dowód części $(*)$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot \to p \vdash \bot \to p; [\,]} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\bot \vdash \bot; [\,]} \qquad \dfrac{}{p \vdash p; [\,]}}{\bot, \bot \to p \vdash p; [\,]}}{\bot \to p, (\bot \to p) \to \bot \vdash p; [\,]}}{(\bot \to p) \to \bot \vdash (\bot \to p) \to p; [\,]}}{(\bot \to p) \to \bot \vdash \bot; [\varphi]}}{\vdash ((\bot \to p) \to \bot) \to \bot; [\varphi]}}{\vdash \bot; [\psi, \varphi]}
$$

$\vdash (p \wedge \bot) \to ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, \bot \vdash \bot; [\,]}}{p, \bot \vdash p \to \bot; [\,]} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, \bot \vdash p; [\,]}}{p, \bot \vdash \bot \to p; [\,]}}{p, \bot \vdash (p \to \bot) \wedge (\bot \to p); [\,]}}{p \wedge \bot \vdash (p \to \bot) \wedge (\bot \to p); [\,]}}{\vdash (p \wedge \bot) \to ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p)); [\,]}$$

$\vdash ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p)) \to (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \to \bot, \bot \to p \vdash \bot \to p; [\,]} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, \bot \to p \vdash p; [\,]} \qquad \dfrac{}{\bot, p, \bot \to p \vdash \bot; [\,]}}{p, p \to \bot, \bot \to p \vdash \bot; [\,]}}{(\bot \to p) \to p, p \to \bot, \bot \to p \vdash \bot; [\,]}}{p \to \bot, \bot \to p \vdash ((\bot \to p) \to p) \to \bot; [\,]}}{(p \to \bot) \wedge (\bot \to p) \vdash ((\bot \to p) \to p) \to \bot; [\,]}}{\vdash ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p)) \to (((\bot \to p) \to p) \to \bot); [\,]}$$

$\vdash (p \vee \bot) \to ((\bot \to p) \to p)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, \bot \to p \vdash p; [\,]} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, \bot \vdash p; [\,]} \qquad \dfrac{}{\bot \vdash \bot; [\,]}}{\bot, \bot \to p \vdash p; [\,]}}{\bot \to p, p \vee \bot \vdash p; [\,]}}{p \vee \bot \vdash (\bot \to p) \to p; [\,]}}{\vdash (p \vee \bot) \to ((\bot \to p) \to p); [\,]}$$

$\vdash (((\bot \to p) \to p) \to \bot) \to (p \to \bot)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot \to p, p \vdash p; [\,]}}{p \vdash (\bot \to p) \to p; [\,]} \qquad \dfrac{}{p, \bot \vdash \bot; [\,]}}{p, ((\bot \to p) \to p) \to \bot \vdash \bot; [\,]}}{((\bot \to p) \to p) \to \bot \vdash p \to \bot; [\,]}}{\vdash (((\bot \to p) \to p) \to \bot) \to (p \to \bot); [\,]}$$

$\vdash ((\bot \to p) \to \bot) \to ((\bot \to p) \to p)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\bot \to p \vdash \bot \to p; [\,]$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\bot \vdash \bot; [\,]$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$p, \bot \vdash p; [\,]$}
\BinaryInfC{$\bot, \bot \to p \vdash p; [\,]$}
\BinaryInfC{$\bot \to p, (\bot \to p) \to \bot \vdash p; [\,]$}
\UnaryInfC{$(\bot \to p) \to \bot \vdash (\bot \to p) \to p; [\,]$}
\UnaryInfC{$\vdash ((\bot \to p) \to \bot) \to ((\bot \to p) \to p); [\,]$}
\end{prooftree}
$$

$\vdash ((\bot \to p) \to \bot) \to (p \to \bot)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\bot, p \vdash p; [\,]$}
\UnaryInfC{$p \vdash \bot \to p; [\,]$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\bot, p \vdash \bot; [\,]$}
\BinaryInfC{$p, (\bot \to p) \to \bot \vdash \bot; [\,]$}
\UnaryInfC{$(\bot \to p) \to \bot \vdash p \to \bot; [\,]$}
\UnaryInfC{$\vdash ((\bot \to p) \to \bot) \to (p \to \bot); [\,]$}
\end{prooftree}
$$

□

Fragment ICL w języku $(\bot, p, \to, \vee, \wedge)$ jest identyczny z fragmentem w języku $(\bot, p, \to, \wedge)$, ponieważ zachodzi równoważność:

$$\varphi \vee \bot \equiv \neg\neg\varphi \tag{2.2}$$

Oczywiście fragmentu ICL bez intuicjonistycznego falsum nie można traktować jak fragmentu klasycznego tylko ze względu na pewne klasyczne cechy stałej $\bot$. Nadal mamy do czynienia z intuicjonistycznymi spójnikami zdaniowymi, które są wzajemnie niedefiniowalne, w szczególności z intuicjonistyczną implikacją. Można jednakże wydefiniować na gruncie ICL implikację klasyczną w standardowy sposób:

$$\varphi \Rightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi.$$

Przy tak zdefiniowanej implikacji możemy mówić o tym, że $\bot$-negacja jest w pełni klasyczną negacją, ponieważ

$$\varphi \Rightarrow \bot \equiv \varphi \Rightarrow 0 \equiv \neg\varphi.$$

Mamy zatem do czynienia z inwolutywną negacją, gdyż formuła $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ jest równoważna formule $\neg\neg\neg\varphi \vee \varphi$, która jest tautologią ICL (por. Przykład 2.1.4 oraz punkt (4) Lematu 2.4.1). Zdefiniowana powyżej implikacja jest faktycznie spójnikiem klasycznym, ponieważ zachowuje prawo kontrapozycji $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$. Istotnie, formuła $\neg(\neg\neg\psi \vee \neg\varphi) \vee (\neg\varphi \vee \psi)$ jest tezą ICL:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\psi \vdash \psi; [\ ]$}
\UnaryInfC{$\psi \vdash \neg\varphi \vee \psi; [\ ]$}
\UnaryInfC{$\psi \vdash \neg(\neg\neg\psi \vee \neg\varphi) \vee (\neg\varphi \vee \psi); [\ ]$}
\UnaryInfC{$\psi \vdash \bot; [\theta]$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\psi; [\theta]$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\bot \vdash \bot; [\theta]$}
\BinaryInfC{$\neg\neg\psi \vdash \bot; [\theta]$}
\AxiomC{$(*)$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vdash \bot; [\theta]$}
\BinaryInfC{$\neg\neg\psi \vee \neg\varphi \vdash \bot; [\theta]$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\neg\neg\psi \vee \neg\varphi); [\theta]$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\neg\neg\psi \vee \neg\varphi) \vee (\neg\varphi \vee \psi); [\theta]$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\neg\neg\psi \vee \neg\varphi) \vee (\neg\varphi \vee \psi); [\ ]$}
\end{prooftree}
$$

Dowód części $(*)$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vdash \neg\varphi; [\ ]$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vdash \neg\varphi \vee \psi; [\ ]$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vdash \neg(\neg\neg\psi \vee \neg\varphi) \vee (\neg\varphi \vee \psi); [\ ]$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vdash \bot; [\theta]$}
\end{prooftree}
$$

Nie jest to jedyny sposób w jaki można zdefiniować klasyczną implikację w ICL. Liang i Miller w [37] podają przykłady równoważnych form klasycznej implikacji: $\varphi \to (\psi \vee \bot)$ oraz $\varphi \to \neg\neg\psi$. Jednak przy tak zdefiniowanej klasycznej implikacji uzyskamy inne własności na poziomie struktury dowodu.

W pracy [42] McKinsey i Tarski omawiają poszczególne fragmenty logiki intuicjonistycznej z jedną zmienną. W szczególności podają explicite nierównoważne formuły fragmentu $(p, \sim, \to)$, to znaczy

$$p, \sim p, \sim\sim p, p \to p, \sim(p \to p), \sim\sim p \to p.$$

Zakończymy tę część pracy podając twierdzenie dotyczące analogicznego fragmentu ICL.

Twierdzenie 2.5.3. *Fragment* ICL *złożony z* $(0, \bot, p, \to)$ *jest skończony.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że z dokładnością do p-morfizmu istnieje skończenie wiele skończonych modeli dla tego fragmentu. □

Ze względu na równoważności

$$\bot \to \varphi \equiv \neg\neg\varphi \to \varphi,$$

$$\sim\!\bot \equiv \neg\neg\varphi \to \sim\!\neg\varphi,$$

fragment w języku $(0, \bot, p, \to)$ jest równoważny fragmentowi ICL w języku $(p, \neg, \sim, \to)$.

Rozdział 3

Zanurzenie ICL w logikę modalną

Na początku lat 30 XX wieku Gödel zwrócił uwagę na możliwość interpretacji logiki intuicjonistycznej poprzez zanurzenie jej w logice modalnej S4 [24]. Wiadomo, że logika klasyczna powstaje z intuicjonistycznej poprzez dodanie pewnych aksjomatów, o czym wspominaliśmy na początku Rozdziału 2. Pomiędzy logiką intuicjonistyczną a logiką klasyczną istnieje nieskończenie wiele logik pośrednich powstających poprzez odpowiednie rozszerzenie zbioru aksjomatów (H1) – (H9). Przykładem logiki pośredniej jest logika **LC** Gödla-Dummeta rozszerzająca $\mathcal{H}$-IRZ o formułę $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ czy logika **KC** Jankova powstająca przez dodanie do zbioru aksjomatów intuicjonistycznych słabe prawo wyłączonego środka. Okazuje się, że każdą logikę pośrednią można zanurzyć w pewnej logice modalnej. Ta odpowiedniość pozwala na rozważanie problemów dotyczących logik pośrednich na gruncie logiki modalnej.

Intuicjonistyczna Logika Kontrolna nie jest logiką pośrednią, mimo tego można dla niej wskazać odpowiednie zanurzenie w pewną logikę modalną. Punktem wyjścia dla tego typu zanurzenia jest logika S4, która – podobnie jak logika intuicjonistyczna – jest pełna względem klasy modeli Kripkego z relacją zwrotną i przechodnią. Pozostaje jednak problem translacji stałej $\perp$ oraz zachowanie własności r-modelu, w którym korzeń jest wyróżnionym światem. Okazuje się, że zdaniowa logika modalna jest niewystarczająca i konieczne jest zanurzenie ICL w pewną silniejszą logikę.

W niniejszym rozdziale przypomnimy podstawowe definicje związane z logikami modalnymi oraz fakty dotyczące zanurzenia danej logiki pośredniej w pewną logikę modalną. Następnie zdefiniujemy odpowiednią dla logiki ICL translację i logikę modalną będącą jej odpowiednikiem. Definicje i twierdzenia z punktów 3.2 — 3.3 są nowymi, niepublikowanymi dotąd wynikami.

3.1 Związek IRZ ze zdaniowymi logikami modalnymi

Logika modalna jest rozszerzeniem językowym logiki klasycznej. Poniższe definicje dotyczące logik modalnych podajemy za [1]. Do języka $\mathcal{L}_k$ klasycznej logiki zdaniowej zawierającego zbiór zmiennych zdaniowych Φ, stałą falsum 0_k oraz verum 1_k i spójniki alternatywy $\vee_k$ i negacji $\neg_k$ dodajemy operator modalny konieczności $\Box$. Formuły modalne φ definiujemy następująco:

$$\varphi ::= 1_k \,|\, 0_k \,|\, p \,|\, \neg_k\varphi \,|\, \varphi \vee_k \psi \,|\, \Box\varphi$$

gdzie p przebiega po wszystkich elementach ze zbioru Φ. Alternatywa i koniunkcja w logice klasycznej wystarcza do wydefiniowana pozostałych spójników w sposób zwyczajowy:

$$\varphi \wedge_k \psi := \neg_k(\neg_k\varphi \vee_k \neg_k\psi),$$

$$\varphi \to_k \psi := \neg_k\varphi \vee_k \psi,$$

$$\Diamond\varphi := \neg_k\Box\neg_k\varphi.$$

Język zdaniowej logiki modalnej zdefiniowany jak wyżej będziemy oznaczać $\mathcal{L}_m$. Logiką modalną będziemy nazywać zbiór formuł modalnych zawierający wszystkie tezy KRZ i zamknięty ze względu na regułę modus ponens i podstawienie. Będziemy rozważać *normalne* logiki modalne, to znaczy takie, które zawierają formułę

$$\mathsf{K}: \ \Box(p \to_k q) \to_k (\Box p \to_k \Box q)$$

i są domknięte ze względu na regułę Gödla:

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi}.$$

Definicję modelu Kripkego podajemy za [1].

Definicja 3.1.1. Modelem Kripkego dla języka $\mathcal{L}_m$ nazywamy trójkę $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, gdzie W jest niepustym zbiorem światów, R relacją określoną na zbiorze W, a V waluacją. Relacja forsowania formuły φ w świecie w modelu $\mathcal{M}$ jest określona następująco:

- $\mathcal{M}, w \nVdash 0_k$ oraz $\mathcal{M}, w \Vdash 1_k$
- $\mathcal{M}, w \Vdash p$ wtw $w \in V(p)$, gdzie $p \in \Phi$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \neg_k \varphi$ wtw $\mathcal{M}, w \nVdash \varphi$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \vee_k \psi$ wtw $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ lub $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \rightarrow_k \psi$ wtw $\mathcal{M}, w \nVdash \varphi$ lub $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi$ wtw dla każdego $v \in W$ jeżeli $\langle w, v \rangle \in R$ to $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$

W odróżnieniu od modelu Kripkego dla logiki intuicjonistycznej nie zakładamy, że waluacja V jest monotoniczna. Aksjomatami wspomnianej we wstępie logiki S4 są

$$\mathsf{T}: \quad \Box p \rightarrow_k p,$$

$$\mathsf{4}: \quad \Box p \rightarrow_k \Box\Box p.$$

Aksjomat T wymusza zwrotność relacji R w modelu dla logiki S4, natomiast aksjomat 4 – przechodniość.

Definiujemy translację Gödla-McKinseya-Tarskiego z języka $\mathcal{L}_i$ na język modalnej logiki zdaniowej $\mathcal{L}_m$:

$$\begin{array}{rcl}
T(0) & := & 0_k \\
T(1) & := & 1_k \\
T(p) & := & \Box p \\
T(\sim\varphi) & := & \Box\neg_k T(\varphi) \\
T(\varphi \vee \psi) & := & T(\varphi) \vee_k T(\psi) \\
T(\varphi \wedge \psi) & := & T(\varphi) \wedge_k T(\psi) \\
T(\varphi \rightarrow \psi) & := & \Box(T(\varphi) \rightarrow_k T(\psi))
\end{array}$$

Powyższa translacja jest jedną z kilku wersji, wszystkie są równoważne na gruncie dowodliwości S4. Twierdzenie o zanurzeniu logiki intuicjonistycznej w logikę $\mathsf{S4}$ pokazali w pracy [42] McKinsey i Tarski, ale jako problem otwarty zostało postawione przez Gödla w [24]. Podajemy je za [4].

Twierdzenie 3.1.2. *Dla dowolnej formuły Intuicjonistycznej Logiki Zdaniowej* φ

$$\vdash_{\mathsf{IRZ}} \varphi \text{ wtw } \vdash_{\mathsf{S4}} T(\varphi).$$

Dummett i Lemmon [13] pokazali, że równoważność w powyższym twierdzeniu można rozszerzyć do

$$\vdash_{\mathsf{L}} \varphi \text{ wtw } \vdash_{\tau\mathsf{L}} T(A),$$

gdzie $\mathsf{L} = \mathsf{IRZ} + \{A_i\}_{i\in I}$ jest dowolną logiką pośrednią, natomiast $\tau\mathsf{L} = \mathsf{S4} \oplus \{T(A_i)\}_{i\in I}$ odpowiadającym jej rozszerzeniem normalnym logiki $\mathsf{S4}$. Późniejsze prace Maksimovej i Rybakova [40] oraz Esakii [15, 16] i Bloka [2] stanowią podstawę badań nad zanurzeniami logik pośrednich w różne systemy modalne. Zdefiniowano odwzorowanie

$$\rho : \mathcal{L}N\mathsf{S4} \to \mathcal{L}\mathsf{IRZ}$$

przyporządkowujące logice modalnej M, będącej normalnym rozszerzeniem logiki $\mathsf{S4}$, pewną logikę pośrednią $\rho\mathsf{M} = \{\varphi \mid \mathsf{M} \vdash T(\varphi)\}$, która jest zanurzona w logice M poprzez translację T. Logika $\rho\mathsf{M}$ jest nazywana *superitnuicjonistycznym fragmentem logiki* M (lub *si-fragmentem*), zaś logika modalna M jest nazywana *odpowiednikiem modalnym* $\rho\mathsf{M}$ (ang. *modal companion of* $\rho\mathsf{M}$).

Odwzorowanie ρ z kraty normalnych rozszerzeń logiki $\mathsf{S4}$ w kratę logik pośrednich jest surjekcją [13]. Dla danej logiki pośredniej L, logika $\tau\mathsf{L}$ jest najmniejszym odpowiednikiem modalnym logiki L. Można pokazać, że każda logika pośrednia posiada także największy odpowiednik modalny. Dla logiki intuicjonistycznej najmniejszym odpowiednikiem modalnym jest logika $\mathsf{S4}$, a największym logika Grzegorczyka będąca normalnym rozszerzeniem logiki $\mathsf{S4}$ o formułę $\Box(\Box(p \to_k \Box p) \to_k p) \to_k p$.

Większość ważnych własności logiki modalnej M zachowuje się przy przejściu do jej superintuicjonistycznego fragmentu $\rho\mathsf{M}$. W szczególności zachowane są własność modelu skończonego, rozstrzygalność czy Kripke-zupełność.

3.2 Translacja w logikę modalną z kwantyfikatorami

Poszukując odpowiednika modalnego dla ICL opieramy się na przedstawionej powyżej translacji Gödla-McKinseya-Tarskiego. Jednakże jest ona niewystarczająca po pierwsze ze względu na różnice w języku oraz na własność r-modelu, w którym korzeń jest jedynym elementem, w którym stała $\bot$ nie jest forsowana. Prowadzi to do konieczności zanurzenia ICL w takiej logice modalnej, która byłaby wyznaczona przez klasę modeli z wyróżnionym korzeniem. Za punkt wyjścia bierzemy w tym przypadku logikę Gödla-Löba

$$\mathsf{GL} = \mathsf{K4} \oplus \Box(\Box p \to_k p) \to_k \Box p,$$

która jest wyznaczona przez pewną podklasę struktur niezwrotnych. Istnieje zanurzenie logiki IRZ w GL, które polega na „uzwrotnieniu" światów w modelu intuicjonistycznym przez pewną translację. W przypadku poszukiwanej przez nas logiki modalnej wybieramy taką, która jest wyznaczona poprzez klasę modeli, w których korzeń jest jedynym niezwrotnym światem.

Stała $\bot$ nie może być przetłumaczona na formułę zależną od zmiennych, ani na żadną ze stałych. Sięgamy więc do logiki modalnej z kwantyfikatorami w celu przetłumaczenia stałej $\bot$ na formułę zamkniętą nie będącą żadną ze stałych logiki modalnej.

Rozważamy logikę modalną z kwantyfikatorami zdaniowymi QML w języku $\mathcal{L}_{\mathsf{QML}}$ złożonym z

$$0_k, 1_k, \Box, \Diamond, \wedge_k, \vee_k, \to_k, \forall, \exists.$$

Dodatkowo definiujemy operator silnej konieczności $\boxdot$ w sposób zwyczajowy

$$\boxdot\varphi := \varphi \wedge \Box\varphi.$$

Definicja 3.2.1. Model Kripkego $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ dla języka $\mathcal{L}_{\mathsf{QML}}$ definiujemy tak, jak model dla języka $\mathcal{L}_m$ (Definicja 3.1.1), dodając warunki dla kwantyfikatorów zdaniowych:

- $\mathcal{M}, w \Vdash \exists p\varphi$ wtw istnieje $\mathrm{P} \subseteq W$ taki, że $\mathcal{M}[\mathrm{P}/p], w \models \varphi$,
- $\mathcal{M}, w \Vdash \forall p\varphi$ wtw dla dowolnego $\mathrm{P} \subseteq W$ zachodzi $\mathcal{M}[\mathrm{P}/p], w \models \varphi$,

gdzie $\mathcal{M}[\mathrm{P}/p]$ jest modelem $\langle W, R, V'\rangle$ takim, że

$$V'(q) = \begin{cases} V(q), & \text{gdy} \quad q \neq p \\ \mathrm{P}, & \text{gdy} \quad q = p. \end{cases}$$

Niech φ oraz ψ będą formułami ICL. Definiujemy translację $()^a$ z języka ICL na język QML:

$$\begin{array}{rcl} 0^a & := & 0_k \\ 1^a & := & 1_k \\ \perp^a & := & \forall p(\Box p \to_k p) \\ p^a & := & \boxdot p \\ (\varphi \wedge \psi)^a & := & (\varphi^a \wedge_k \psi^a) \\ (\varphi \vee \psi)^a & := & (\varphi^a \vee_k \psi^a) \\ (\varphi \to \psi)^a & := & \boxdot(\varphi^a \to_k \psi^a) \end{array}$$

Zdefiniujemy teraz klasę struktur, która będzie wyznaczać poszukiwaną logikę QML.

Definicja 3.2.2. Niech $\mathcal{T} = \langle \mathrm{T}, \leqslant \rangle$ będzie skończonym drzewem z wyróżnionym korzeniem $\mathbf{r}$. *A-drzewem* $\mathcal{T}^a = \langle \mathrm{T}, \sqsubset \rangle$ nazywamy strukturę opartą na $\mathcal{T}$, w której relacja $\sqsubset$ jest następującym zbiorem:

$$\{(\mathbf{r}, w) : w \in \mathrm{T} \setminus \{\mathbf{r}\}\} \cup \{(v, w) : v \leqslant w \text{ oraz } v, w \in \mathrm{T} \setminus \{\mathbf{r}\}\}.$$

Definicja 3.2.3. Niech **AT** będzie klasą wszystkich skończonych a-drzew. Wówczas zbiór wszystkich formuł prawdziwych w klasie takich struktur będziemy oznaczać przez

$$\mathsf{AT} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{QML}} : \mathbf{AT} \models \varphi\}.$$

Zdaniową logikę modalną z kwantyfikatorami opartą na strukturach K4 definiujemy w następujący sposób:

$$\mathsf{QK4} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\mathsf{QML}} : \mathbf{Trans} \models \varphi\}$$

gdzie **Trans** oznacza klasę wszystkich struktur przechodnich.

A-drzewo jest strukturą, w której korzeń $\mathbf{r}$ jest jedynym niezwrotnym światem. Niech V będzie wartościowaniem na strukturze $\mathcal{T}$ w sensie Definicji 1.2.5. Definiujemy wartościowanie V^a jako obcięcie wartościowania V do zmiennych zdaniowych oraz stałych 0 oraz 1 bez uwzględnienia $\perp$. Niech

$$\mathcal{M} = (\mathcal{T}, V)$$

będzie r-modelem. Wtedy odpowiadający mu model QML definiujemy jako

$$\mathcal{M}^a = (\mathcal{T}^a, V^a).$$

Twierdzenie 3.2.4. *Dla każdego drzewa $\mathcal{T}$ oraz dla r-modelu $\mathcal{M}$, każdego $w \in \mathrm{T}$ oraz każdej formuły φ w* ICL *zachodzi równoważność*

$$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{wtw} \quad \mathcal{M}^a, w \Vdash \varphi^a.$$

Dowód. Indukcja względem budowy formuły φ.

Przypadki, gdy $\varphi = 0$ lub $\varphi = 1$ są oczywiste.

Niech $\varphi = \bot$. Oczywiście $\mathcal{M}, w \Vdash \bot$ wtw $w \neq \mathbf{r}$.
Niech $w = \mathbf{r}$. Rozważmy zbiór $\mathrm{P} = \mathrm{T} \setminus \{\mathbf{r}\}$. Ponieważ korzeń $\mathbf{r}$ w modelu $\mathcal{M}^a$ jest niezwrotny otrzymujemy $\mathcal{M}^a[\mathrm{P}/p], \mathbf{r} \Vdash \Box p$ oraz $\mathcal{M}^a[\mathrm{P}/p], \mathbf{r} \nVdash p$. Stąd wynika, że

$$\mathcal{M}^a, \mathbf{r} \nVdash \forall p(\Box p \to_k p).$$

Niech $w \neq \mathbf{r}$. Wówczas $\mathcal{M}^a, w \Vdash \forall p(\Box p \to_k p)$, ponieważ każdy świat w modelu $\mathcal{M}^a$ istotnie powyżej korzenia jest zwrotny.

A zatem $\mathcal{M}^a, w \Vdash \forall p(\Box p \to_k p)$ wtw $w \neq \mathbf{r}$.

Niech $\varphi = p$. Wówczas

$$\mathcal{M}^a, w \Vdash p^a \quad \text{wtw}$$

$$\mathcal{M}^a, w \Vdash p \wedge_k \Box p \quad \text{wtw}$$

$$\mathcal{M}^a, w \Vdash p \text{ oraz dla każdego } w' \in \mathrm{T}(w \sqsubset w' \text{ pociąga } \mathcal{M}^a, w' \Vdash p) \quad \text{wtw}$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash p.$$

Niech $\varphi = \psi \to \theta$. Wówczas

$$\mathcal{M}^a, w \Vdash (\psi \to \theta)^a \quad \text{wtw}$$

$$\mathcal{M}^a, w \Vdash \boxdot(\psi^a \to_k \theta^a) \quad \text{wtw}$$

$$\mathcal{M}^a, w \Vdash \psi^a \to_k \theta^a$$

$$\text{oraz}$$

$$\text{dla każdego } w' \in \mathrm{T}(w \sqsubset w' \text{ pociąga } \mathcal{M}^a, w' \Vdash \psi^a \to_k \theta^a) \quad \text{wtw}$$

$$\mathcal{M}^a, w \nVdash \psi^a \text{ lub } \mathcal{M}^a, w \Vdash \theta^a$$

$$\text{oraz}$$

$$\text{dla każdego } w' \in \mathrm{T}(w \sqsubset w' \text{ pociąga } (\mathcal{M}^a, w' \nVdash \psi^a \text{ lub } \mathcal{M}^a, w' \Vdash \theta^a) \quad \text{wtw}$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash \psi \to \theta$$

Dowód przypadków $\varphi = \psi \wedge \theta$ oraz $\varphi = \psi \vee \theta$ przebiega analogicznie. $\Box$

Zastosowanie operatora silnej konieczności w translacji $(\cdot)^a$ gwarantuje przetransponowanie własności monotoniczności relacji forsowania z r-modelu do modelu dla logiki modalnej dla wszystkich światów, włącznie z niezwrotnym korzeniem w modelu QML.

Ponieważ w definicji skończonych a-drzew wymagana była przechodniość struktury, więc z **AT** $\subseteq$ **Trans** otrzymujemy następujący fakt.

Fakt 3.2.5. QK4 $\subset$ AT

Językiem definiowanej zdaniowej logiki modalnej z kwantyfikatorami QK4 jest język $\mathcal{L}_{\mathsf{QML}}$. Aksjomatyzacja:

- aksjomaty i reguły QML
  - aksjomaty KRZ dla formuł języka $\mathcal{L}_{\mathsf{QML}}$,
  - aksjomaty dla kwantyfikatorów

$$\varphi(q) \to \exists p \varphi(p) \qquad\qquad \forall p \varphi(p) \to \varphi(q)$$

  - reguła generalizacji

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi},$$

  - reguły Mostowskiego dla kwantyfikatorów

$$\frac{\varphi(p) \to \psi}{\exists p \varphi(p) \to \psi} \qquad\qquad \frac{\psi \to \varphi(p)}{\psi \to \forall p \varphi(p)},$$

  - aksjomat wycinania

$$\exists p(\psi \leftrightarrow p),$$

    gdzie p nie jest zmienną wolną w ψ.

- K $= \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$,
- 4 $= \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

3.3 Rozstrzygalność logiki AT

Wiemy, że logika ICL jest rozstrzygalna, ponieważ posiada własność modelu skończonego i odpowiednie systemy dowodowe. Wprawdzie logika AT wprowadzona w poprzednim podrozdziale ma semantykę w postaci skończonych modeli, jednak nie znamy jej żadnego systemu dowodowego. W tej sytuacji własność modelu skończonego nie przesądza o jej rozstrzygalności.

Wykażemy jednak, że modalna logika zdaniowa z kwantyfikatorami, w którą zanurzyliśmy ICL jest rozstrzygalna. Zastosujemy standardową procedurę sprowadzenia problemu spełnialności w logice modalnej do problemu spełnialności w $\mathsf{S}n\mathsf{S}$, to znaczy w monadycznej teorii drugiego rzędu nad drzewami nieskończonej głębokości, gdzie każdy węzeł ma n potomków (przy czym $n \in \omega$ lub $n = \omega$). Znana jest interpretacja logiki modalnej S4 w $\mathsf{S}\omega\mathsf{S}$ przedstawiona w [1]. Zaprezentujemy analogiczną interpretację dla logiki QK4 zdefiniowanej w Rozdziale 3.2. Ponieważ zarówno AT jak i $\mathsf{S}n\mathsf{S}$ są sformułowane na gruncie logiki klasycznej, dla przejrzystości zapisu pomijamy indeks k przy wszystkich spójnikach języka $\mathcal{L}_k$.

Rozpoczniemy od formalnej definicji porządku leksykograficznego oraz $\mathsf{S}n\mathsf{S}$ – podajemy je za [1].

Definicja 3.3.1. Niech $\mathcal{A}$ będzie określonym alfabetem, wówczas $\mathcal{A}^*$ jest zbiorem słów, czyli wszystkich skończonych ciągów elementów ze zbioru $\mathcal{A}$, włączając w to *słowo puste* λ.

1. Definiujemy częściowy porządek *prefiksowy* $\leqslant$ na $\mathcal{A}^*$ poprzez $x \leqslant y$ jeżeli dla pewnego $z \in \mathcal{A}^*$ zachodzi $y = xz$. Jeżeli $x \leqslant y$ oraz $x \neq y$, wówczas piszemy $x < y$.

2. Niech $\mathcal{A}$ będzie uporządkowany poprzez relację $<_{\mathcal{A}}$. Wówczas definiujemy *porządek leksykograficzny na* $\mathcal{A}^*$ *indukowany przez* $<_{\mathcal{A}}$ następująco: $x \preceq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leqslant y$ lub $x = zau$ oraz $y = zbv$, gdzie $a, b \in \mathcal{A}$ oraz $a \leqslant_{\mathcal{A}} b$.

3. Dla dowolnego $a \in \mathcal{A}$ definiujemy funkcję $r_a : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ wyznaczającą *a-ty następnik* poprzez $r_a(x) = xa$.

Definicja 3.3.2. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ lub $n = \omega$, niech T_n będzie zbiorem słów $\{i \in \omega \,|\, i < n\}^*$. Struktura $\mathfrak{N}_n$ wyznaczona jest przez czwórkę uporządkowaną $(\mathrm{T}_n, r_i, \leqslant, \preceq)_{i<n}$, gdzie $\preceq$ jest porządkiem leksykograficznym

indukowanym przez zwykłe uporządkowanie liczb naturalnych $<_\omega$. Strukturę $\mathfrak{N}_n$ nazywamy *strukturą funkcji n-następnika*. Wszystkie te struktury są przeliczalne nieskończone.

Monadyczna teoria drugiego rzędu funkcji n-następnika jest teorią struktury $\mathfrak{N}_n$ w monadycznym języku drugiego rzędu dla właściwej sygnatury. Tę teorię oznacza się jako $\mathsf{S}n\mathsf{S}$.

Każda struktura $\mathfrak{N}_n$ jest nieskończonym drzewem, w którym każdy węzeł posiada n bezpośrednich potomków. Na przykład struktura $\mathfrak{N}_1$ jest drzewem nieskończonej głębokości, w którym każdy węzeł posiada tylko jednego potomka, czyli jest to izomorficzny obraz zbioru liczb naturalnych ze zwykłym porządkiem.

Każda teoria $\mathsf{S}n\mathsf{S}$ jest monadyczną teorią drugiego rzędu w odpowiednim języku. Takim językiem dla struktury $\mathfrak{N}_2$ (to znaczy pełnego drzewa binarnego) jest język zawierający dwa symbole funkcyjne r_0 i r_1 odpowiadające funkcjom lewego i prawego następnika, oraz dwa symbole relacyjne $\leqslant$ i $\preceq$ odpowiadające porządkom prefiksowemu i leksykograficznemu. Dodatkowo język zawiera przeliczalny nieskończony zbiór zmiennych indywiduowych $x, y, z, \ldots$, przeliczalny nieskończony zbiór zmiennych monadycznych drugiego rzędu $X, Y, Z, \ldots$, który przebiega po podzbiorach dziedziny, spójniki zdaniowe oraz kwantyfikatory wiążące zmienne indywiduowe i predykatywne. Rozważmy przypadek ogólny struktury $\mathsf{S}\omega\mathsf{S}$.

W $\mathsf{S}\omega\mathsf{S}$ możemy zdefiniować predykat wyznaczający korzeń drzewa T_ω jako najmniejszy element:

$$\text{Korzeń}(y) \quad := \quad \forall x(y \leqslant x).$$

Skoro symbol $\preceq$ jest interpretowany jako porządek liniowy, możemy przy jego pomocy zdefiniować równość $x = y$ jako $x \preceq y \wedge y \preceq x$.

Niech X oznacza monadyczną zmienną drugiego rzędu. Będziemy używać zmiennych zdaniowych $p, q, \ldots$ z języka $\mathcal{L}_{\mathsf{QML}}$ jako indeksów dla tych zmiennych. Zwyczajowo będziemy pisać $y \in X$ zamiast $X(y)$ oraz $X \subseteq Y$ dla oznaczenia $\forall z(X(z) \to Y(z))$.

Definiujemy następujące $\mathcal{L}_{\mathsf{S}\omega\mathsf{S}}$-formuły:

$$\begin{aligned} \text{Skończony}(Y) \quad &:= \quad \exists x \forall y(y \in Y \to y \preceq x) \\ \text{Drzewo}(Y) \quad &:= \quad \exists x\ \text{Korzeń}(x) \in Y \wedge \forall z(z \in Y \to \forall y(y \leqslant z \to y \in Y)) \end{aligned}$$

Niech $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_n)$ będzie formułą języka $\mathcal{L}_{\mathsf{QML}}$, niech x będzie zmienną indywiduową w języku $\mathcal{L}_{\mathsf{S}\omega\mathsf{S}}$ oraz niech Y będzie monadyczną zmienną predykatywną. Formułę języka $\mathcal{L}_{\mathsf{S}\omega\mathsf{S}}$ $(\varphi)^{x,Y} = (\varphi)^{x,Y}(x, Y, X_{p_1}, \ldots, X_{p_n})$ definiujemy rekursyjnie w następujący sposób:

$$\begin{array}{rcl}
(0)^{x,Y} & := & 0 \\
(p)^{x,Y} & := & x \in X_p \\
(\psi \wedge \theta)^{x,Y} & := & (\psi)^{x,Y} \wedge (\theta)^{x,Y} \\
(\psi \vee \theta)^{x,Y} & := & (\psi)^{x,Y} \vee (\theta)^{x,Y} \\
(\psi \to \theta)^{x,Y} & := & (\psi)^{x,Y} \to (\theta)^{x,Y} \\
(\Diamond\psi)^{x,Y} & := & (\text{Korzeń}(x) \wedge \exists y{\in}Y(y > x \wedge (\psi)^{y,Y})) \\
 & & \vee(\neg\text{Korzeń}(x) \wedge \exists y{\in}Y(y \geqslant x \wedge (\psi)^{y,Y})) \\
(\Box\psi)^{x,Y} & := & (\text{Korzeń}(x) \wedge \forall y{\in}Y(y > x \to (\psi)^{y,Y})) \\
 & & \vee(\neg\text{Korzeń}(x) \wedge \forall y{\in}Y(y{\geqslant}x \to (\psi)^{y,Y})) \\
(\forall p\ \psi)^{x,Y} & := & \forall X_p(X_p \subseteq Y \to (\psi)^{x,Y}) \\
(\exists p\ \psi)^{x,Y} & := & \exists X_p(X_p \subseteq Y \wedge (\psi)^{x,Y})
\end{array}$$

gdzie w przypadku formuły $(\forall p\ \psi)^{x,Y}$ oraz $(\exists p\ \psi)^{x,Y}$ zmienna x jest nową zmienną nie występującą w formule $(\psi)^{y,Y}$. Zauważmy, że oba składniki alternatywy w formule $(\Diamond\psi)^{x,Y}$ wykluczają się nawzajem; podobnie w przypadku alternatywy dla formuły $(\Box\psi)^{x,Y}$.

Dla każdej formuły φ w języku $\mathcal{L}_{\mathsf{QML}}$ definiujemy zdanie Prawdziwy(φ) w języku $\mathcal{L}_{\mathsf{S}\omega\mathsf{S}}$ w następujący sposób:

$$\text{Prawdziwy}(\varphi) := \forall Y\ (\text{Drzewo}(Y) \wedge \text{Skończony}(Y)\ \to\ \forall x{\in}Y\ (\varphi)^{x,Y})$$

W poniższym lemacie, aby uprościć symbolikę, zakładamy, że w formule φ nie występują zmienne wolne.

Lemat 3.3.3. *Niech $\mathcal{M} = (\mathrm{T}, \mathbf{r}, \sqsubset, V)$ będzie modelem opartym na skończonym a-drzewie z korzeniem $\mathbf{r}$, w którym T jest poddrzewem drzewa T_ω. Niech $w \in \mathrm{T}$ oraz niech φ będzie $\mathcal{L}_{\mathsf{QML}}$-formułą. Wówczas*

$$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \text{ wtw } \mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\varphi)^{x,Y}\ [\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)].$$

Dowód. Ustalmy najpierw wartościowanie α zmiennych drugiego rzędu, takie że $\alpha(Y) = \mathrm{T}$ oraz $\alpha(X_p) \subseteq \mathrm{T}$ dla każdej zmiennej X_p oraz

$$\alpha(X_p) = V(p),$$

dla wszystkich zmiennych zdaniowych p w języku $\mathcal{L}_{\mathsf{QML}}$.

Dowód tezy przebiega indukcyjnie względem budowy formuły φ.

(1) $\varphi = 0$. Przypadek oczywisty.

(2) $\varphi = p$.

Mamy

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M}, w \Vdash p & \text{wtw} & w \in \alpha(X_p) \subseteq \mathrm{T} \\ & \text{wtw} & \mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models x \in X_p[\alpha(w/x)] \\ & \text{wtw} & \mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (p)^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)] \end{array}$$

(3) $\varphi = \psi \wedge \theta$. Z założenia indukcyjnego:

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M}, w \Vdash \psi \wedge \theta & \text{wtw} & \mathcal{M}, w \Vdash \psi \text{ oraz } \mathcal{M}, w \Vdash \theta \\ & \text{wtw} & \mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\psi)^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)] \text{ oraz} \\ & & \mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\theta)^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)] \end{array}$$

(4) $\varphi = \psi \vee \theta$ Podobnie jak (3).

(5) $\varphi = \psi \rightarrow \theta$ Podobnie jak (3).

(6) $\varphi = \Diamond\psi$.

Przypadek I. $w = \mathbf{r}$.

Niech $\mathcal{M}, \mathbf{r} \Vdash \Diamond\psi$.Wtedy istnieje $u \in \mathrm{T}$ taki, że $\mathbf{r} < u$ oraz $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$. Na mocy założenia indukcyjnego, $\mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\psi)^{y,Y}[\alpha(u/y, \mathrm{T}/Y)]$. Co więcej,

$$\mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models \text{Korzeń}(x) \wedge y \in Y \wedge x < y \wedge (\psi)^{y,Y}[\alpha(\mathbf{r}/x, u/y, \mathrm{T}/Y)],$$

więc

$$\mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models \text{Korzeń}(x) \wedge \exists y{\in}Y(x < y \wedge (\psi)^{y,Y})[\alpha(\mathbf{r}/x, \mathrm{T}/Y)].$$

A zatem pierwszy składnik alternatywy w translacji formuły $\Diamond\psi$ jest spełniony w $\mathsf{S}\omega\mathsf{S}$ i w szczególności

$$\mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\Diamond\psi)^{x,Y}[\alpha(\mathbf{r}/x, \mathrm{T}/Y)].$$

W przeciwną stronę, jeżeli

$$\mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\Diamond\psi)^{x,Y}[\alpha(\mathbf{r}/x, \mathrm{T}/Y)]$$

wówczas pierwszy składnik alternatywy w formule $(\Diamond\psi)^{x,Y}$ jest spełniony przez element $u \in M$, taki że $\mathbf{r} < u$. Wówczas na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$, co pociąga

$$\mathcal{M}, r \Vdash \Diamond\psi.$$

Przypadek II. $w \neq \mathbf{r}$.

Niech $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\psi$.Wtedy istnieje $u \in M$ taki, że $w \leqslant u$ oraz $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$. Na mocy założenia indukcyjnego, $\mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\psi)^{y,Y}[\alpha(u/y)]$. Co więcej,

$$\mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models x \neq k \wedge y \in Y \wedge x \leqslant y \wedge (\psi)^{y,Y}[\alpha(r/x, u/y, M/Y)],$$

więc

$$\mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models x \neq k \wedge \exists y{\in}Y(x \leqslant y \wedge (\psi)^{y,Y}[\alpha(r/x, M/Y)]).$$

A zatem druga część alternatywy w translacji formuły $\Diamond\psi$ jest spełniona w $\mathsf{S}\omega\mathsf{S}$ i w szczególności

$$\mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\Diamond\psi)^{x,Y}[\alpha(r/x, M/Y)].$$

W przeciwną stronę, jeżeli

$$\mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\Diamond\psi)^{x,Y}[\alpha(r/x, M/Y)]$$

wówczas druga część alternatywy w formule $(\Diamond\psi)^{x,Y}$ jest spełniona przez element $u \in M$, taki że $r \leqslant u$. Wówczas na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$, co pociąga

$$\mathcal{M}, r \Vdash \Diamond\psi.$$

(7) $\varphi = \Box\psi$. Podobnie jak w poprzednim przypadku.
(8) $\varphi = \exists p\psi(p)$.

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \Vdash \exists p\psi(p) & \text{wtw} & \text{istnieje } \mathrm{P} \subseteq \mathrm{T} \text{ taki, że } \mathcal{M}[\mathrm{P}/p], w \Vdash \psi(p) \\
& \text{wtw} & \mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\psi)^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y, \mathrm{P}/X_p)] \\
& \text{wtw} & \mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models \exists X_p(X_p \subseteq Y \wedge (\psi)^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)]) \\
& \text{wtw} & \mathsf{S}\omega\mathsf{S} \models (\exists p\psi(p))^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)].
\end{array}$$

(9) $\varphi = \forall p\psi(p)$. Podobnie jak w poprzednim przypadku. $\Box$

Ostatecznie możemy sformułować twierdzenie, które sprowadza prawdziwość formuły w logice AT do prawdziwości predykatu Prawdziwy w teorii $\mathsf{S}\omega\mathsf{S}$ i vice versa.

Twierdzenie 3.3.4. *Dla każdej $\mathcal{L}_{\mathsf{QML}}$-formuły φ,*

$$\mathsf{AT} \models \varphi \text{ wtw } \mathsf{S\omega S} \models \text{Prawdziwy}(\varphi).$$

Dowód. Niech φ będzie formułą w języku logiki modalnej drugiego rzędu.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że $\mathsf{S\omega S} \not\models \text{Prawdziwy}(\varphi)$. Wówczas

$$\mathsf{S\omega S} \not\models \forall Y \ (\text{Drzewo}(Y) \land \text{Skończony}(Y) \ \rightarrow \ \forall x{\in}Y \ (\varphi)^{x,Y})$$

To oznacza, że istnieje podzbiór T zbioru T_ω oraz element $w \in \mathrm{T}$, taki że

$$\mathsf{S\omega S} \models \text{Drzewo}(Y) \land \text{Skończony}(Y) \ [\mathrm{T}/Y]$$

oraz

$$\mathsf{S\omega S} \not\models (\varphi)^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)].$$

Na mocy Lematu 3.3.3 warunek $\mathsf{S\omega S} \not\models (\varphi)^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)]$ pociąga $\mathcal{M}, w \not\Vdash \varphi$, gdzie model $\mathcal{M} = \langle \mathrm{T}, \mathbf{r}, \sqsubset, V \rangle$ ma określoną waluację jako $V(\mathrm{P}) = \alpha(X_p)$. A zatem $\mathsf{AT} \not\models \varphi$.

($\Leftarrow$)

Załóżmy, że $\mathsf{AT} \not\models \varphi$. Wówczas istnieje model $\mathcal{M} = \langle \mathrm{T}, \mathbf{r}, \sqsubset, V \rangle$, gdzie $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{T}_\omega$ oraz $w \in \mathrm{T}$, taki że $\mathcal{M}, w \not\Vdash \varphi$. Na mocy Lematu 3.3.3:

$$\mathsf{S\omega S} \not\models (\varphi)^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)].$$

Wobec tego biorąc $\alpha(X_p) = V(\mathrm{P})$ mamy

$$\mathsf{S\omega S} \models \exists Y (\text{Drzewo}(Y) \land \text{Skończony}(Y) \land \neg(\varphi)^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)],$$

czyli $\mathsf{S\omega S} \not\models (\varphi)^{x,Y}[\alpha(w/x, \mathrm{T}/Y)]$. □

Wobec powyższego możemy powołać się na twierdzenie Rabina [48] dotyczące rozstrzygalności monadycznej teorii drugiego rzędu nad nieskończonymi drzewami. Podajemy je tutaj w postaci podanej w [1].

Twierdzenie 3.3.5 (Rabin)**.** *Dla dowolnej liczby naturalnej n bądź $n = \omega$, teoria* $\mathsf{S\omega S}$ *jest rozstrzygalna.*

Wobec powyższego i przedstawionej przez nas interpretacji logiki modalnej AT możemy zakończyć następującym wnioskiem:

Twierdzenie 3.3.6. *Logika* AT *jest rozstrzygalna.*

Rozdział 4

Podsumowanie

W niniejszej pracy zaprezentowano kompletny opis monadycznego negacyjnego fragmentu ICL wraz z zależnościami między nierównoważnymi formułami z tego fragmentu (Rozdział 2.4). Wynik ten został opublikowany w pracy [22]. W Rozdziale 2.5 podano opis fragmentu monadycznego w języku bez intuicjonistycznego falsum oraz wniosek o skończoności monadycznego fragmentu implikacyjnego ICL. Te wyniki były wzmiankowane w pracy [23], bez podania explicite postaci fragmentu „klasycznego".

W Rozdziale 3.2 pokazano, że ICL można zanurzyć w pewną logikę modalną z kwantyfikatorami zdaniowymi wyznaczoną przez klasę skończonych drzew z niezwrotnym korzeniem oznaczoną przez AT. W Rozdziale 3.3 udowodniono rozstrzygalność logiki AT poprzez sprowadzenie problemu spełnialności w tej logice do problemu spełnialności w monadycznej teorii drugiego rzędu $\mathsf{S}\omega\mathsf{S}$. Wyniki zawarte w tych rozdziałach nie były do tej pory publikowane.

Jak zauważono w Rozdziale 3 Intuicjonistyczna Logika Kontrolna jest rozstrzygalna. Zagadnieniem otwartym pozostaje pytanie o złożoność obliczeniową tej logiki.

Richard Statman wykazał, że zarówno IRZ jak i jej fragment implikacyjny są PSPACE-zupełne [52]. W dowodzie tych twierdzeń użyte były techniki teoriodowodowe. Równoważne uzasadnienie PSPACE-zupełności podał Viteslav Svejdar [53], który zastosował dowód poprzez redukcję problemu decyzyjnego do problemu QBF (ang. *Quantified Boolean Formulas*), o którym wiadomo, że jest PSPACE- zupełny. Znany jest szereg wyników dotyczących złożoności fragmentów IRZ, w szczególności wiadomo, że ilość zmiennych w języku logiki intuicjonistycznej, poza fragmentem monadycznym, nie ma wpływu na złożoność obliczeniową (Rybakov [49]).

Intuicjonistyczna Logika Kontrolna jest rozszerzeniem językowym IRZ. Oznacza to, że złożoność ICL należy do klasy problemów co najmniej PSPACE-zupełnych. Stawiamy hipotezę, że dodanie nowej stałej do języka IRZ nie wyprowadza poza tę klasę złożoności. Podstawę do dalszej pracy w zakresie badania złożności obliczeniowej ICL stanowi procedura poszukiwania ewentualnego kontrmodelu dla formuły zamieszczona w Załączniku 3. Impulsem do jej stworzenia była praca Ladnera [36], w której przedstawił on procedurę budowy kontrmodelu dla logiki S4. Ze względu na różnice modelowe i językowe w przypadku ICL konieczne było znaczące rozszerzenie podstawowego algorytmu poprzez sformułowanie trzech osobnych procedur ICL-R dla korzenia modelu, ICL-I dla światów urojonych oraz ICL-W w przypadku wyjściowym, gdy rozpatrywany świat nie jest określony. Krótkie omówienie tych procedur zamieszczone zostało w Załączniku 3.

Załącznik 1

Podajemy kompletny zestaw zbiorów $\mathcal{S}^+$ dla n-formuł $N_k p$ długości $k \leqslant 5$.

1. $\mathcal{S}^+(p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{1}, \mathcal{M}^2_\mathbf{1}, i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
2. $\mathcal{S}^+(\sim p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}, \mathcal{M}^2_\mathbf{0}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0})\}$
3. $\mathcal{S}^+(\neg p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}, \mathcal{M}^2_\mathbf{0}, \mathcal{M}_\mathbf{2}, \mathcal{M}_\mathbf{3}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
4. $\mathcal{S}^+(\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{1}, \mathcal{M}_\mathbf{2}, \mathcal{M}^2_\mathbf{1}, i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
5. $\mathcal{S}^+(\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{1}\}$
6. $\mathcal{S}^+(\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{1}, \mathcal{M}_\mathbf{2}, \mathcal{M}^2_\mathbf{1}, \mathcal{M}_\mathbf{3}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
7. $\mathcal{S}^+(\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{1}, \mathcal{M}^2_\mathbf{1}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
8. $\mathcal{S}^+(\sim\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}, \mathcal{M}^2_\mathbf{0}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0})\}$
9. $\mathcal{S}^+(\sim\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}, \mathcal{M}^2_\mathbf{0}, \mathcal{M}_\mathbf{2}, \mathcal{M}^2_\mathbf{1}, \mathcal{M}_\mathbf{3}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
10. $\mathcal{S}^+(\sim\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}\}$
11. $\mathcal{S}^+(\sim\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}\}$
12. $\mathcal{S}^+(\neg\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}, \mathcal{M}^2_\mathbf{0}, \mathcal{M}_\mathbf{3}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
13. $\mathcal{S}^+(\neg\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}, \mathcal{M}^2_\mathbf{0}, \mathcal{M}_\mathbf{2}, \mathcal{M}^2_\mathbf{1}, \mathcal{M}_\mathbf{3}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
14. $\mathcal{S}^+(\neg\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}, \mathcal{M}^2_\mathbf{0}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
15. $\mathcal{S}^+(\neg\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{0}, \mathcal{M}^2_\mathbf{0}, \mathcal{M}_\mathbf{2}, \mathcal{M}_\mathbf{3}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
16. $\mathcal{S}^+(\sim\sim\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{1}, \mathcal{M}_\mathbf{2}, \mathcal{M}^2_\mathbf{1}, i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$
17. $\mathcal{S}^+(\sim\sim\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{1}\}$
18. $\mathcal{S}^+(\sim\sim\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_\mathbf{1}, \mathcal{M}^2_\mathbf{0}, \mathcal{M}_\mathbf{2}, \mathcal{M}^2_\mathbf{1}, \mathcal{M}_\mathbf{3}, i(\mathcal{M}_\mathbf{0}), i(\mathcal{M}_\mathbf{1})\}$

19. $\mathcal{S}^{+}(\sim\sim\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

20. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}\}$

21. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}\}$

22. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}\}$

23. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}\}$

24. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

25. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

26. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

27. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

28. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

29. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

30. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

31. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

32. $\mathcal{S}^{+}(\sim\sim\sim\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}})\}$

33. $\mathcal{S}^{+}(\sim\sim\sim\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

34. $\mathcal{S}^{+}(\sim\sim\sim\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}\}$

35. $\mathcal{S}^{+}(\sim\sim\sim\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}\}$

36. $\mathcal{S}^{+}(\sim\sim\neg\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

37. $\mathcal{S}^{+}(\sim\sim\neg\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

38. $\mathcal{S}^{+}(\sim\sim\neg\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

39. $\mathcal{S}^{+}(\sim\sim\neg\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

40. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\sim\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}\}$

41. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\sim\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}\}$

42. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\sim\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}\}$

43. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\sim\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}\}$

44. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\neg\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}\}$

45. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\neg\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}\}$

46. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\neg\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}\}$

47. $\mathcal{S}^{+}(\sim\neg\neg\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}\}$

48. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\sim\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

49. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\sim\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

50. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\sim\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

51. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\sim\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

52. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\neg\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

53. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\neg\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

54. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\neg\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

55. $\mathcal{S}^{+}(\neg\sim\neg\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

56. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\sim\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

57. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\sim\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

58. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\sim\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

59. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\sim\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

60. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\neg\sim\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

61. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\neg\sim\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{1}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

62. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\neg\neg\sim p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

63. $\mathcal{S}^{+}(\neg\neg\neg\neg\neg p) = \{\mathcal{M}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}^{2}_{\mathbf{0}}, \mathcal{M}_{\mathbf{2}}, \mathcal{M}_{\mathbf{3}}, i(\mathcal{M}_{\mathbf{0}}), i(\mathcal{M}_{\mathbf{1}})\}$

Załącznik 2

Przez *długość formuły* rozumiemy w tym przypadku ilość spójników.
Do klasy abstrakcji $[\bot]_\equiv$ należą następujące formuły.

- Długości 2:

  $(p \to p) \to \bot$, $(p \wedge \bot) \vee \bot$, $(p \to \bot) \wedge \bot$, $(p \vee \bot) \wedge \bot$,

- Długości 3:

  $((\bot \to p) \to \bot) \wedge \bot$, $((\bot \to p) \to p) \wedge \bot$, $((\bot \to p) \vee \bot) \wedge \bot$, $(p \to \bot) \wedge (p \vee \bot)$,

- Długości 4:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \wedge \bot$, $(p \vee \bot) \wedge ((\bot \to p) \to \bot)$

- Długości 5:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \wedge (p \vee \bot)$, $((\bot \to p) \to \bot) \wedge ((\bot \to p) \vee \bot)$,

- Długości 6:

  $(((\bot \to p) \to \bot) \wedge (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$,
  $(((\bot \to p) \to p) \wedge (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$

Do klasy abstrakcji $[p \to p]_\equiv$ należą następujące formuły.

- Długości 2:

  $\bot \to (p \to \bot)$, $\bot \to (p \vee \bot)$, $p \to (\bot \to p)$, $p \to (p \vee \bot)$, $(p \wedge \bot) \to p$, $(p \wedge \bot) \to \bot$, $(p \wedge \bot) \to p$, $(p \to \bot) \vee p$

- Długości 3:

  $\bot \to ((\bot \to p) \to \bot)$, $\bot \to ((\bot \to p) \to p)$, $\bot \to ((\bot \to p) \vee \bot)$, $p \to ((\bot \to p) \to p)$, $p \to ((\bot \to p) \vee \bot)$, $((\bot \to p) \to p) \vee p$, $((\bot \to p) \vee \bot) \vee p$, $(p \wedge \bot) \to (\bot \to p)$, $(p \wedge \bot) \to (p \to \bot)$, $(p \wedge \bot) \to (p \vee \bot)$, $(\bot \to p) \vee (p \to \bot)$, $(p \to \bot) \vee (p \vee \bot)$,

- Długości 4:

  $\perp \to (((\perp \to p) \to p) \to \perp)$, $(\perp \to p) \to ((\perp \to p) \vee \perp)$,
  $(p \vee \perp) \to ((\perp \to p) \to p)$, $(p \vee \perp) \to ((\perp \to p) \vee \perp)$,
  $(p \wedge \perp) \to ((\perp \to p) \to \perp)$, $(p \wedge \perp) \to ((\perp \to p) \to p)$,
  $(p \wedge \perp) \to ((\perp \to p) \vee \perp)$, $((\perp \to p) \to \perp) \to (\perp \to p)$,
  $(\perp \to p) \vee ((\perp \to p) \to \perp)$, $(\perp \to p) \vee ((\perp \to p) \to p)$,
  $(p \to \perp) \vee ((\perp \to p) \to \perp)$, $(p \to \perp) \vee ((\perp \to p) \vee \perp)$

- Długości 5:

  $(p \wedge \perp) \to (((\perp \to p) \to p) \to \perp)$, $(p \wedge \perp) \to ((\perp \to p) \wedge (p \to \perp))$,
  $(((\perp \to p) \to p) \to \perp) \to (p \to \perp)$, $((p \to \perp) \wedge (\perp \to p)) \to (\perp \to p)$,
  $((p \to \perp) \wedge (\perp \to p)) \to (p \to \perp)$, $((\perp \to p) \to \perp) \to ((\perp \to p) \to p)$,
  $((\perp \to p) \to \perp) \vee ((\perp \to p) \vee \perp)$, $((\perp \to p) \to p) \vee ((\perp \to p) \vee \perp)$,

- Długości 6:

  $(((\perp \to p) \to p) \to \perp) \to ((\perp \to p) \vee \perp)$,
  $((p \to \perp) \wedge (\perp \to p)) \to ((\perp \to p) \vee \perp)$,
  $(((\perp \to p) \to p) \vee (((\perp \to p) \to p) \to \perp)$,
  $(((\perp \to p) \to p) \vee ((p \to \perp) \wedge (\perp \to p))$

- Długości 7:

  $((p \to \perp) \wedge (\perp \to p)) \to (((\perp \to p) \to p) \to \perp)$

Do klasy abstrakcji $[p]_{\equiv}$ należą następujące formuły.

- Długości 2:

  $(p \to \perp) \to p$, $(p \wedge \perp) \vee p$, $(\perp \to p) \wedge p$, $(p \vee \perp) \wedge p$,

- Długości 3:

  $((\perp \to p) \vee \perp) \to p$, $((\perp \to p) \to p) \wedge p$, $((\perp \to p) \vee \perp) \wedge p$,
  $(p \to \perp) \to (p \wedge \perp)$, $(\perp \to p) \wedge (p \vee \perp)$,

- Długości 4:

  $(((\perp \to p) \to p) \to \perp) \to p$, $(\perp \to p) \wedge ((\perp \to p) \to p)$

- Długości 5:

  $(((\perp \to p) \to p) \to \perp) \to (p \wedge \perp)$, Do klasy abstrakcji $[\bot \to p]_\equiv$ należą następujące formuły.

- Długości 2:

  $\bot \to (\bot \to p)$, $\bot \to (p \wedge \bot)$, $(\bot \to p) \vee p$

- Długości 3:

  $p \to ((\bot \to p) \to \bot)$, $((\bot \to p) \to \bot) \to p$,
  $((\bot \to p) \to p) \to p$, $(p \to \bot) \to (\bot \to p)$,
  $(p \vee \bot) \to (\bot \to p)$, $(\bot \to p) \vee (p \wedge \bot)$,

- Długości 4:

  $\bot \to ((p \vee \bot) \to (p \wedge \bot))$, $((p \vee \bot) \to (p \wedge \bot)) \vee p$,
  $((\bot \to p) \to \bot) \to (\bot \to p)$, $((\bot \to p) \to \bot) \to (p \wedge \bot)$,
  $((\bot \to p) \to p) \to (\bot \to p)$, $((\bot \to p) \vee \bot) \to (\bot \to p)$,
  $(\bot \to p) \wedge ((\bot \to p) \vee \bot)$

- Długości 5:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \to (\bot \to p)$, $(p \to \bot) \to ((\bot \to p) \wedge (p \to \bot))$,
  $((\bot \to p) \wedge (p \to \bot)) \vee (\bot \to p)$

- Długości 6:

  $((\bot \to p) \to \bot) \to ((\bot \to p) \wedge (p \to \bot))$

- Długości 7:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \to ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p))$

Do klasy abstrakcji $[p \to \bot]_\equiv$ należą następujące formuły.

- Długości 2:

  $p \to (p \to \bot)$, $p \to (p \wedge \bot)$, $(p \vee \bot) \to \bot$, $(p \to \bot) \vee \bot$

- Długości 3:

  $(\bot \to p) \to (p \to \bot)$, $(p \vee \bot) \to (p \to \bot)$, $(p \to \bot) \vee (p \wedge \bot)$

- Długości 4:

  $p \to (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$, $p \to ((p \vee \bot) \to (p \wedge \bot))$,
  $(p \vee \bot) \to ((\bot \to p) \to \bot)$, $((\bot \to p) \vee \bot) \to (p \to \bot)$,
  $((\bot \to p) \to p) \to (p \to \bot)$, $(p \to \bot) \vee ((\bot \to p) \to \bot)$

- Długości 5:

  $(\bot \to p) \to (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$, $(p \vee \bot) \to (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$, $(\bot \to p) \to ((\bot \to p) \wedge (p \to \bot))$, $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \vee (p \to \bot)$, $((\bot \to p) \wedge (p \to \bot)) \vee (p \to \bot)$, $((\bot \to p) \to p) \to ((\bot \to p) \to \bot)$

- Długości 6:

  $((\bot \to p) \vee \bot) \to (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$,
  $(((\bot \to p) \to \bot) \vee (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$,
  $(((\bot \to p) \to \bot) \vee ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p))$

Do klasy abstrakcji $[p \vee \bot]_{\equiv}$ należą następujące formuły.

- Długości 2:

  $(p \to \bot) \to \bot$, $(p \vee \bot) \vee \bot$, $(p \vee \bot) \vee p$,

- Długości 3:

  $(p \to \bot) \to (p \vee \bot)$, $(p \vee \bot) \vee (p \wedge \bot)$,

- Długości 4:

  $(p \vee \bot) \wedge ((\bot \to p) \to p)$, $(p \vee \bot) \wedge ((\bot \to p) \vee \bot)$

- Długości 5:

  $((\bot \to p) \to p) \wedge ((\bot \to p) \vee \bot)$,

Do klasy abstrakcji $[p \wedge \bot]_{\equiv}$ należą następujące formuły.

- Długości 2:

  $(\bot \to p) \wedge \bot$, $(p \wedge \bot) \wedge \bot$, $(p \to \bot) \wedge p$, $(p \wedge \bot) \wedge p$

- Długości 3:

  $((\bot \to p) \to \bot) \wedge p$, $(\bot \to p) \wedge (p \wedge \bot)$, $(p \to \bot) \wedge (p \wedge \bot)$, $(p \vee \bot) \wedge (p \wedge \bot)$,

- Długości 4:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \wedge p$, $((p \vee \bot) \to (p \wedge \bot)) \wedge \bot$,
  $((p \vee \bot) \to (p \wedge \bot)) \wedge p$, $((\bot \to p) \vee \bot) \to (p \wedge \bot)$,
  $(\bot \to p) \wedge ((\bot \to p) \to \bot)$, $(p \wedge \bot) \wedge ((\bot \to p) \to \bot)$,
  $(p \wedge \bot) \wedge ((\bot \to p) \to p)$, $(p \wedge \bot) \wedge ((\bot \to p) \vee \bot)$

- Długości 5:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \wedge (p \wedge \bot)$, $((p \wedge \bot) \wedge (\bot \to p)) \wedge (p \vee \bot)$, $((p \wedge \bot) \wedge (\bot \to p)) \wedge (p \wedge \bot)$

- Długości 6:

  $((\bot \to p) \to \bot) \wedge ((p \wedge \bot) \wedge (\bot \to p))$ $((\bot \to p) \to p) \wedge ((p \wedge \bot) \wedge (\bot \to p))$

Do klasy abstrakcji $[(\bot \to p) \to \bot]_{\equiv}$ należą następujące formuły.

- Długości 3:

  $((\bot \to p) \vee \bot) \to \bot, ((\bot \to p) \to \bot) \vee \bot$, $(\bot \to p) \to (p \wedge \bot)$,

- Długości 4:

  $(\bot \to p) \to ((\bot \to p) \to \bot)$, $(p \wedge \bot) \vee ((\bot \to p) \to \bot)$, $(p \to \bot) \wedge ((\bot \to p) \to \bot)$, $(p \to \bot) \wedge ((\bot \to p) \to p)$

- Długości 5:

  $((\bot \to p) \vee \bot) \to ((\bot \to p) \to \bot)$, $((\bot \to p) \to \bot) \wedge ((\bot \to p) \to p)$

Do klasy abstrakcji $[(\bot \to p) \to p]_{\equiv}$ należą następujące formuły.

- Długości 3:

  $((\bot \to p) \to p) \vee \bot$, $((\bot \to p) \to \bot) \vee p$, $(\bot \to p) \to (p \vee \bot)$,

- Długości 4:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \to \bot$, $((p \vee \bot) \to (p \wedge \bot)) \to \bot$, $((p \vee \bot) \to (p \wedge \bot)) \to p$, $(\bot \to p) \to ((\bot \to p) \to p)$, $(\bot \to p) \to ((\bot \to p) \to \bot)$, $(\bot \to p) \to ((\bot \to p) \to p)$, $((\bot \to p) \vee \bot) \to (p \vee \bot)$, $(p \vee \bot) \vee ((\bot \to p) \to \bot)$, $(p \vee \bot) \vee ((\bot \to p) \to p)$, $(p \wedge \bot) \vee ((\bot \to p) \to p)$

- Długości 5:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \to (p \vee \bot)$, $((p \to \bot) \wedge (\bot \to p)) \to (p \vee \bot)$, $((p \to \bot) \wedge (\bot \to p)) \to (p \wedge \bot)$, $((\bot \to p) \vee \bot) \to ((\bot \to p) \to p)$, $((\bot \to p) \to \bot) \to ((\bot \to p) \to p)$

- Długości 6:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \to ((\bot \to p) \to \bot)$,
  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \to ((\bot \to p) \to p)$,
  $((p \to \bot) \wedge (\bot \to p)) \to ((\bot \to p) \to \bot)$,
  $((p \to \bot) \wedge (\bot \to p)) \to ((\bot \to p) \to p)$,

Do klasy abstrakcji $[(\bot \to p) \vee \bot]_{\equiv}$ należą następujące formuły.

- Długości 3:

  $((\bot \to p) \to \bot) \to \bot$, $((\bot \to p) \vee \bot) \vee \bot$, $(\bot \to p) \vee (p \vee \bot)$,

- Długości 4:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \vee p$, $(\bot \to p) \to ((\bot \to p) \vee \bot)$,
  $((\bot \to p) \to \bot) \to (p \vee \bot)$, $((\bot \to p) \to p) \to (p \vee \bot)$,
  $(\bot \to p) \vee ((\bot \to p) \vee \bot)$, $(p \vee \bot) \vee ((\bot \to p) \vee \bot)$,
  $(p \wedge \bot) \vee ((\bot \to p) \vee \bot)$

- Długości 5:

  $(p \to \bot) \to (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$, $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \vee (\bot \to p)$,
  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \vee (p \vee \bot)$, $((p \wedge \bot) \wedge (\bot \to p)) \vee (p \vee \bot)$,
  $((\bot \to p) \to \bot) \to ((\bot \to p) \vee \bot)$, $((\bot \to p) \to p) \to ((\bot \to p) \vee \bot)$

- Długości 6:

  $((\bot \to p) \to \bot) \to (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$,
  $(((\bot \to p) \vee \bot) \vee (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$,
  $(((\bot \to p) \vee \bot) \vee ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p))$

Do klasy abstrakcji $[((\bot \to p) \to p) \to \bot]_{\equiv}$ należą następujące formuły.

- Długości 4:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \vee \bot$, $((p \vee \bot) \to (p \wedge \bot)) \vee \bot$,
  $(p \to \bot) \wedge ((\bot \to p) \vee \bot)$,

- Długości 5:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \vee (p \wedge \bot)$, $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \wedge (p \to \bot)$

- Długości 6:

  $((\bot \to p) \to p) \to (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$

- Długości 7: $((\bot \to p) \vee \bot) \wedge (((\bot \to p) \to p) \to \bot)$,
  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \vee ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p))$

Do klasy abstrakcji $[(p \to \bot) \wedge (\bot \to p)]_\equiv$ należą następujące formuły.

- Długości 3:

  $(p \vee \bot) \to (p \wedge \bot)$

- Długości 4:

  $((\bot \to p) \to p) \to (p \wedge \bot)$

- Długości 5:

  $(p \vee \bot) \to ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p))$, $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \wedge (\bot \to p)$, $((p \wedge \bot) \wedge (\bot \to p)) \vee (p \wedge \bot)$, $((p \wedge \bot) \wedge (\bot \to p)) \wedge (\bot \to p)$, $((p \wedge \bot) \wedge (\bot \to p)) \wedge (p \to \bot)$

- Długości 6:

  $((\bot \to p) \to p) \to ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p))$,
  $((\bot \to p) \vee \bot) \to ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p))$,
  $((p \to \bot) \vee \bot) \wedge ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p))$

- Długości 7:

  $(((\bot \to p) \to p) \to \bot) \wedge ((p \to \bot) \wedge (\bot \to p))$

Załącznik 3

Algorytm testujący, czy formuła ICL jest spełniona w danym modelu:

Test for $\varphi \in \mathsf{ICL}$-SATISFIABLE
read φ
$v \leftarrow \neg\mathsf{ICL}\text{-W}(\emptyset, \{A\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset);$
end

Poniżej przedstawiono procedury dekompozycji formuł w zależności od rodzaju światu w modelu. W każdej z procedur formuła jest dekomponowana na podformuły aż do przypadku zmiennych zdaniowych. Wówczas bieżący świat jest etykietowany informacją dotyczącą formuł w nim forsowanych i odrzucanych, a następnie tworzony jest nowy świat w modelu. Poza przypadkami formuł implikacyjnych, w których stała $\perp$ występuje jako podformuła, znaczenie spójników jest takie jak w logice intuicjonistycznej. Reguły sterujące tymi spójnikami zostały skonstruowane na bazie rachunku sekwentowego dla logiki intuicjonistycznej podanego przez R. Dyckhoffa w [14].

Procedura dla korzenia modelu:

procedure $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$:
begin
if $\mathcal{T} \cup \mathcal{F} \not\subseteq$ VAR **then**
begin

1. **choose** $A \in (\mathcal{T} \cup \mathcal{F}) -$ VAR;
2. **if** $A = 0$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return false**;
3. **if** $A = 0$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return** $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T}, \mathcal{F} - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
4. **if** $A = \perp$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return false**;
5. **if** $A = \perp$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return** $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T}, \mathcal{F} - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
6. **if** $A = \top$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return** $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

7. **if** $A = \top$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return false**;
8. **if** $A = B \wedge C$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
   $\mathsf{ICL}\text{-R}((\mathcal{T} \cup \{B, C\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
9. **if** $A = B \wedge C$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return**
   $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{B\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) \vee$
   $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{C\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
10. **if** $A = B \vee C$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}((\mathcal{T} \cup \{B\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) \vee$
    $\mathsf{ICL}\text{-R}((\mathcal{T} \cup \{C\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
11. **if** $A = B \vee C$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{B, C\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
12. **if** $A = B \to 0$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F} \cup \{B\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}} \cup \{B\}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
13. **if** $A = \perp \to B$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}} \cup \{B\}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
14. **if** $A = B \to \perp$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F} \cup \{B\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
15. **if** $A = B \to \perp$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T} \cup \{B\}, \mathcal{F} - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
16. **if** $A = \top \to B$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}((\mathcal{T} \cup \{B\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
17. **if** $A = B \to C$ and $A \in \mathcal{T}$ and $B \in \mathrm{VAR}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}} \cup \{B \to C\}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
18. **if** $A = (B \wedge C) \to D$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}((\mathcal{T} \cup \{B \to (C \to D)\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

19. **if** $A = (B \vee C) \to D$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}((\mathcal{T} \cup \{B \to D, C \to D\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

20. **if** $A = (B \to C) \to D$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}((\mathcal{T} \cup \{C \to D\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}} \cdot (B, C), \mathcal{L}) \vee$
    $\mathsf{ICL}\text{-R}((\mathcal{T} \cup \{D\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

21. **if** $A = B \to C$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T}, \mathcal{F} - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}} \cdot (B, C), \mathcal{L})$
    end;
    if $B \in \mathrm{VAR}$ and $B \in \mathcal{T}$ and $B \to C \in \vec{\mathcal{T}}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-R}(\mathcal{T} \cup \{C\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}} - \{B \to C\}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
    if $\mathcal{T} \cup \mathcal{F} \subseteq \mathrm{VAR}$ **then**
    begin

22. **if** $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ **then return false**;

23. **if** $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ **then return**
    $\bigwedge (B, C) \in \vec{\mathcal{F}}, (\mathcal{T} \cup \{B\}, C) \notin \mathcal{L}$
    $\mathsf{ICL}\text{-W}(\mathcal{T} \cup \tilde{\mathcal{T}} \cup \{B\}, \{C\} \cup \tilde{\mathcal{F}}, \emptyset, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \emptyset, \mathcal{L} \cdot (\mathcal{T} \cup \{B\}, C))$;
    return true
    end
    end

Procedura dla nieokreślonego świata modelu:

procedure $\mathsf{ICL}\text{-W}(\mathcal{T}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$:
begin
if $\mathcal{T} \cup \mathcal{F} \not\subseteq \mathrm{VAR}$ **then**
begin

1. **choose** $A \in (\mathcal{T} \cup \mathcal{F}) -$ VAR;

2. **if** $A = 0$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return false**;

3. **if** $A = 0$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return** $\mathsf{ICL}\text{-W}(\mathcal{T}, \mathcal{F} - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

4. **if** $A = \perp$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
   $\mathsf{ICL}\text{-I}(\mathcal{T} \cup \{\top, \perp\}, \mathcal{F} \cup \{0\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

5. **if** $A = \perp$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return** ICL-R$(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \mathcal{P}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
6. **if** $A = \top$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return** ICL-W$(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
7. **if** $A = \top$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return false**;
8. **if** $A = B \wedge C$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return** ICL-W$((\mathcal{T} \cup \{B, C\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
9. **if** $A = B \wedge C$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return** ICL-W$(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{B\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) \vee$ ICL-W$(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{C\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
10. **if** $A = B \vee C$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return** ICL-W$((\mathcal{T} \cup \{B\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) \vee$ ICL-W$((\mathcal{T} \cup \{C\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
11. **if** $A = B \vee C$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return** ICL-W$(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{B, C\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
12. **if** $A = B \to 0$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return** ICL-W$(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F} \cup \{B\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}} \cup \{B\}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
13. **if** $A = \perp \to B$ and $A \in \mathcal{T}$ **then go to** ICL-R$(\mathcal{T} - \{A, \perp, \top\}, (\mathcal{F} - \{0\}) \cup \mathcal{P}, \tilde{\mathcal{T}} \cup \{B\}, \tilde{\mathcal{F}}, \emptyset, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \emptyset)$;
14. **if** $A = B \to \perp$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return** ICL-W$(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P} \cup \{B\}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
15. **if** $A = B \to \perp$ and $A \in \mathcal{F}$ **then go to** ICL-R$(\mathcal{T} - \{\perp, \top\}, (\mathcal{F} - \{0\}) \cup \mathcal{P}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \emptyset, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \emptyset)$;
16. **if** $A = B \to C$ and $A \in \mathcal{T}$ and $B \in$ VAR **then return** ICL-W$(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}} \cup \{B \to C\}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

17. **if** $A = (B \wedge C) \to D$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-W}((\mathcal{T} \cup \{B \to (C \to D)\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

18. **if** $A = (B \vee C) \to D$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-W}((\mathcal{T} \cup \{B \to D, C \to D\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

19. **if** $A = (B \to C) \to D$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-W}((\mathcal{T} \cup \{C \to D\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}} \cdot (B, C), \mathcal{L}) \vee$
    $\mathsf{ICL}\text{-W}((\mathcal{T} \cup \{D\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

20. **if** $A = B \to C$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-W}(\mathcal{T}, \mathcal{F} - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}} \cdot (B, C), \mathcal{L})$
    end;
    if $B \in \mathrm{VAR} \cup \{\top, \bot\}$ and $B \in \mathcal{T}$ and $B \to C \in \vec{\mathcal{T}}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-W}(\mathcal{T} \cup \{C\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}} - \{B \to C\}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
    if $\mathcal{T} \cup \mathcal{F} \subseteq \mathrm{VAR} \cup \{\top, \bot, 0\}$ **then**
    begin

21. **if** $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ **then return false**;

22. **if** $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ **then return**
    $\bigwedge (B, C) \in \vec{\mathcal{F}}, (\mathcal{T} \cup \{B\}, C) \notin \mathcal{L}$
    $\mathsf{ICL}\text{-W}(\mathcal{T} \cup \tilde{\mathcal{T}} \cup \{B\}, \{C\} \cup \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \emptyset, \mathcal{L} \cdot (\mathcal{T} \cup \{B\}, C))$;
    return true end
    end

Procedura dla świata urojonego:

procedure $\mathsf{ICL}\text{-I}(\mathcal{T}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$:
begin
if $\mathcal{T} \cup \mathcal{F} \not\subseteq \mathrm{VAR} \cup \{\top, \bot, 0\}$ **then**
begin

1. **choose** $A \in (\mathcal{T} \cup \mathcal{F}) - (\mathrm{VAR} \cup \{\top, \bot, 0\})$;

2. **if** $A = B \wedge C$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL}\text{-I}((\mathcal{T} \cup \{B, C\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;

3. **if** $A = B \wedge C$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return**
   $\mathsf{ICL\text{-}I}(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{B\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) \vee$
   $\mathsf{ICL\text{-}I}(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{C\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L});$
4. **if** $A = B \vee C$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
   $\mathsf{ICL\text{-}I}((\mathcal{T} \cup \{B\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L}) \vee$
   $\mathsf{ICL\text{-}I}((\mathcal{T} \cup \{C\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L});$
5. **if** $A = B \vee C$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return**
   $\mathsf{ICL\text{-}I}(\mathcal{T}, (\mathcal{F} \cup \{B, C\}) - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L});$
6. **if** $A = B \rightarrow 0$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
   $\mathsf{ICL\text{-}I}(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F} \cup \{B\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}} \cup \{B\}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L});$
7. **if** $A = \bot \rightarrow B$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
   $\mathsf{ICL\text{-}I}((\mathcal{T} \cup \{B\})\{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \emptyset, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \emptyset);$
8. **if** $A = B \rightarrow \bot$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
   $\mathsf{ICL\text{-}I}(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L});$
9. **if** $A = B \rightarrow \bot$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return false;**
10. **if** $A = B \rightarrow C$ and $A \in \mathcal{T}$ and $B \in \mathrm{VAR}$ **then return**
    $\mathsf{ICL\text{-}I}(\mathcal{T} - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}} \cup \{B \rightarrow C\}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L});$
11. **if** $A = (B \wedge C) \rightarrow D$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL\text{-}I}((\mathcal{T} \cup \{B \rightarrow (C \rightarrow D)\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L});$
12. **if** $A = (B \vee C) \rightarrow D$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL\text{-}I}((\mathcal{T} \cup \{B \rightarrow D, C \rightarrow D\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L});$
13. **if** $A = (B \rightarrow C) \rightarrow D$ and $A \in \mathcal{T}$ **then return**
    $\mathsf{ICL\text{-}I}((\mathcal{T} \cup \{C \rightarrow D\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}} \cdot (B, C), \mathcal{L}) \vee$
    $\mathsf{ICL\text{-}I}((\mathcal{T} \cup \{D\}) - \{A\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L});$

14. **if** $A = B \to C$ and $A \in \mathcal{F}$ **then return**
 $\mathsf{ICL\text{-}I}(\mathcal{T}, \mathcal{F} - \{A\}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{F}} \cdot (B, C), \mathcal{L})$
 end;
 if $B \in \mathrm{VAR} \cup \{\top, \bot\}$ and $B \in \mathcal{T}$ and $B \to C \in \vec{\mathcal{T}}$ **then return**
 $\mathsf{ICL\text{-}I}(\mathcal{T} \cup \{C\}, \mathcal{F}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}} - \{B \to C\}, \vec{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$;
 if $\mathcal{T} \cup \mathcal{F} \subseteq \mathrm{VAR} \cup \{\top, \bot, 0\}$ **then**
 begin

15. **if** $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ **then return false**;

16. **if** $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ **then return**
 $\bigwedge (B, C) \in \vec{\mathcal{F}}, (\mathcal{T} \cup \{B\}, C) \notin \mathcal{L}$
 $\mathsf{ICL\text{-}I}(\mathcal{T} \cup \tilde{\mathcal{T}} \cup \{B, \bot, \top\}, \{C, 0\} \cup \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{P}, \vec{\mathcal{T}}, \emptyset, \mathcal{L} \cdot (\mathcal{T} \cup \{B\}, C))$;
 return true end
 end

Bibliografia

[1] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[2] W. J. Blok, *Varieties of interior algebras*, Dysertacja, Uniwersytet Amsterdam, 1976.

[3] L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[4] A. Chagrov, M. Zakharyashchev, Modal Companions of Intermediate Propositional Logic, *Studia Logica*, 51 (1), 49–82, 1992.

[5] A. Church, An unsolvable problem of elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, 58 (2), 345–363, 1936.

[6] A. Church, A formulation of the simple theory of types, *Journal of Symbolic Logic*, 5, 56–68, 1940.

[7] A. Church, A set of postulates for the foundation of logic, *Annals of Mathematics*, 33 (2): 346-366, 1932.

[8] A. Church, A set of postulates for the foundations of logic. (Second paper.), *Annal of Mathematics*, 34(4):839-864,1933.

[9] H.B. Curry, Functionality in combinatory logic, *Proceedings of the National Academy of Science of the USA*, 20, 584–590, 1934.

[10] H.B. Curry, The Combinatory Foundations of Mahtematical Logic, *Journal of Symbolic Logic*, 7, 49–64, 1942.

[11] H.B. Curry, R. Feys, Combinatory Logic I, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1958.

[12] D. van Dalen, *Logic and Structure*, Universitext, Springer-Verlag, 2004.

[13] M. A. E. Dummett, E. J. Lemmon, Modal logics between S4 and S5, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 5, 250–264, 1959.

[14] R. Dyckhoff, Contraction-free sequent calculi for intuitionistic logic, *Journal of Symbolic Logic*, 57(3), 795–807, 1992.

[15] L. L. Esakia, On varieties of Grzegorczyk's algebras, *Studies in Non-Classical Logics and Set Theory*, Nauka, Moskow, 257–287, 1979.

[16] L.L. Esakia, To the theory of modal and superintuitionistic systems. In V.A. Smirnov, *Logical Inference. Proceedings of the USSR Symposium on the Theory of Logical Inference*, 147-–172. Nauka, Moskow, 1979.

[17] M. Felleisen, D. Friedman, E. Kohlbecker, B. Duba, A syntactic theory of sequential control, *Theoretical Computer Science*, 52(3), 205–237, 1987.

[18] M. Felleisen, R. Hieb, The revised report on the syntactic theories of sequential control and state, *Theoretical Computer Science*, 103, 235–271, 1992.

[19] M. Fitting, *Intuitionitic Logic, Model Theory and Forcing*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1969.

[20] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, 39(I,II), 176–210, 405–431, 1935.

[21] J.-Y. Girard, A new constructive logic: classical logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1(3), 255–296, 1991.

[22] A. Glenszczyk, Negational Fragment of Intuitionistic Control Logic, *Studia Logica*, 103 (6), 1101–1121, 2015.

[23] A. Glenszczyk, Monadic Fragments of Intuitionistic Control Logic, *Bulletin of the Section of Logic*, 45(3/4), 143–153, 2016.

[24] K. Gödel, Eine Interpretation des intuitionistichen Aussagenkalküls, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, 39–40, 1933.

[25] T.G. Griffin, A formulae-as-types notion of control, in *Symposium on Principles of Programming Languages*, 47–58, ACM Press, 1990.

[26] A. Heyting, Die formalen regeln der intuitionistischen logik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalishmathematische Klasse*,37, 42–56, 1930.

[27] A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1956, third edition 1971.

[28] W.A. Howard, The formulae-as-types notion of construction, in [50], 480–490.

[29] S. Jaśkowski, Recherches sur le système de la logique intuitioniste, *Congr. intern. Phil. des Sciences*, 6, 58-–61, Hermann. Paris.

[30] S.C. Kleene, λ-definability and recursiveness, *Duke Mathematical Journal*, 2,340–353, 1936.

[31] S.C. Kleene, J. B. Rosser, The inconsistency of certain formal logics, *Annals of Mathematics* 36 (3), 630–636, 1935.

[32] S.A. Kripke, Semantical Analysis of Modal logic I. Normal Modal Propositional Calculi, *Zeitschrift fü Mathematische Logik und Grundlagen der Mathemathik*, 9, 67–96, 1963.

[33] S.A. Kripke, Semantical Considerations on Modal and Intuitionistic Logic, *Acta Philosophica Fennica*, 16, 83–94, 1963.

[34] S. A. Kripke, *Semantical analysis of intuitionistic logic I*, in Crossley and Dummet, *Formal Systems and Recursive Functions, Proceedeings of the Eight Logic Colloquium*, 92–129, Oxford, 1963.

[35] A. N. Kolmogorov, Zur Deutung der intuitionistischen Logik, Math. Z., 35, 58–65, 1932.

[36] R.E.Ladner, The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic, *SIAM Journal of Computing*, 6(3), 467–480, 1977.

[37] Ch. Liang, D. Miller, An Intuitionistic Control Logic, to appear.

[38] Ch. Liang, D. Miller, Unifying Classical and Intuitionistic Logics for Computational Control, Proceedings of LICS 2013.

[39] Ch. Liang, D. Miller, Kripke Semantics and Proof Systems for Combining Intuitionistic Logic and Classical Logic. *Ann. Pure Appl. Logic*, 164 (2), 86–111, 2013.

[40] L. L. Maksimova, V, V, Rybakov, On the lattice of normal modal logics, *Algebra and Logic*, 13, 188–216, 1974.

[41] G.Mints, *A short Introduction to Intuitionistic Logic*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2000.

[42] J.C.C McKinsey, A. Tarski, Some Theorems About the Sentential Calculi of Lewis and Heyting, *Journal of Symbolic Logic*, 13 (1), 1–15, 1948.

[43] J. McKinsey, A. Tarski, On closed elements in closure algebras, *Annals of Mathematics*, 47, 122–162, 1946.

[44] I. Nishimura, On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus, *Journal of Symbolic Logic*, 25, 327–331, 1960.

Logic Programming, vol. 592 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 361–380, Springer-Verlag, 1991.

[45] M. Parigot, $\lambda\mu$-calculus: An algorithmic interpretation of classical natural deduction. In *LPAR: Logic Programming and Automated Reasoning, Iternational Conference*, vol. 624 of *LNCS*, 190–201, Springer, 1992.

[46] L. Rieger, On the lattice theory of brouwerian propositional logic, *Acta fac. rerum nat. Univ. Car.*, 189, 1–40, 1949.

[47] H. Rasiowa, R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, PWN, Warszawa 1963.

[48] M. O. Rabin, Decidability of second-order theories and automata on infinite trees, *Transactions of American Mathematical Society*, 141, 1–35, 1969.

[49] M. N. Rybakov, Complexity of intuitionistic and Visser's basic and formal logics in finitely may variables. In G. Governatori, I. Hodkinson, Y. Venema, *Advaces in Modal Logic 6*, 394–411, Noosa, Australia: King's College Publications, 2006.

[50] J.P. Seldin, J.R. Hindley, *To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, Academic Press, New York, 1980.

[51] M. H. B. Sørensen, P. Urzyczyn, *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism* in Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 149, Elsevier 1998.

[52] R. Statman, Intuitionistic propositional logic is polynomial-space complete, *Theoretical Computer Science*, 9(1), 67–72, 1979.

[53] V. Svejdar, On the polynomial-space completeness of intuitionistic porpositional logic, *Archive for Mathematical Logic*, 42(7), 711–716, 2003.

[54] A. Tarski, Der Aussagenkalkül und die Topologie. *Fundamenta Mathematicae*, 31, 103–134, 1938.

[55] A. S. Troelstra, From constructivism to computer science, *Theoretical Computer Science*, 211(1-2), 233–252, 1999.

[56] A.S.Troelstra, D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics. An Introduction, Volume I and II*, vol. 121, 123 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland, 1988.

[57] A. M. Turing, On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc. (2)* 42, 230–265, 1936.

[58] A. M. Turing, Computability and lambda definability, *Journal of Symbolic Logic* 2, 153–163, 1937.

[59] F. Volter, M. Zakharyaschev, Modal Decision Problems, in *Handbook of Modal Logic*, 427–488, Elsevier, 2007.